Entrée en terminale générale
Spécialité mathématique

Préambule

Tu vas entrer en terminale en septembre prochain. Je te félicite pour ton passage !
Il est important que tu mesures que l'an prochain, au-delà de te préparer au bac, tu vas commencer à acquérir des connaissances et des méthodes de travail indispensables pour réussir dans **tes études supérieures**. Il est aussi important que tu fournisses des efforts réguliers pour que l'année de terminale soit un tremplin efficace pour te constituer une bonne base pour ton dossier d'orientation post-bac. Aujourd'hui, pratiquement toutes les formations de l'enseignement supérieur sont sélectives via la plateforme Parcoursup et avoir ton bac ne te garantit pas d'avoir une place dans la formation de tes rêves. Heureusement peu importe tes notes de première, l'appréciation de ton dossier se fera aussi en mesurant tes **tes progrès, ton sérieux et ta motivation** durant l'année de terminale.
L'objectif de ce livret de révisions est de guider pour préparer ta rentrée en mathématiques. Tu ne seras pas seul(e) et livré(e) à toi-même. Si tu as des difficultés pour réussir un exercice (cela arrivera et c'est normal !) alors tu pourras, à tout moment, nous poser des questions cet été via le tchat à l'adresse suivante

http://sarmate.xyz/Cours/Cahiers_de_vacances/2021/chat_TG/chat_vacances_TG.php

Le lien est disponible sur le site du lycée. Bien sûr, les enseignants qui te répondront seront comme toi en vacances, du coup on ne répondra pas toujours immédiatement en fonction de nos disponibilités mais on te répondra ! Dans l'attente de notre réponse, si tu n'as toujours pas d'idée pour avancer, il te suffira d'aborder un autre exercice.

À quel rythme dois-tu travailler avec ce fichier ?
Ce livret a été conçu comme un cahier de vacances. Tu es libre de le faire dans l'ordre que tu préfères et au rythme que tu veux. Il a été conçu pour que tu puisses travailler avec **un rythme moyen** d'un exercice tous les deux jours. Pour te motiver à chercher tous les exercices. Lors de la semaine de la rentrée le sujet du premier DST de mathématiques sera composé exclusivement d'exercices de cette liste. Donc, si tu sais tout bien faire, tu vas commencer l'année avec un 20/20. Pour t'aider, n'hésite pas à consulter ton cours de 2nde si tu peux. Il y a aussi d'excellentes ressources sur internet pour réviser. Voici deux liens utiles:

- **http://sarmate.xyz/**
- **https://www.maths-et-tiques.fr/**

Voilà, si tu lis cette ligne en ayant aussi lu tout ce qui précède alors tu as sûrement la qualité principale pour réussir: la motivation :).

Bonne préparation de la rentrée et bonnes vacances !

Exercice 1

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a+b\sqrt{c}$, avec a, b et c des entiers.

$A=5\sqrt{96}+\sqrt{24}+2\sqrt{54}$

$B=\sqrt{20}\times\sqrt{80}\times\sqrt{45}$

$C=(4\sqrt{7}+3\sqrt{2})^2$

$D=(2\sqrt{2}-\sqrt{7})^2$

$E=(1+\sqrt{2})^3$

$F=\dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$G=(3-3\sqrt{6})(3+3\sqrt{6})$

$H=\dfrac{24\sqrt{90}}{9\sqrt{160}}$

Exercice 2

$A=\dfrac{\dfrac{-4}{9}+9}{\dfrac{-3}{2}+2}+1$

$B=\dfrac{-10}{7}\div\dfrac{\dfrac{-1}{9}-6}{\dfrac{10}{7}-\dfrac{2}{3}}$

Exercice 3

Montrer que les égalités suivantes sont vraies.

1. Pour tout réels a et b, $\dfrac{1}{2}\left((a+b)^2+(a-b)^2\right)=a^2+b^2$.
2. Pour tout réels a et b, $\dfrac{1}{4}\left((a+b)^2-(a-b)^2\right)=ab$.
3. Pour tout réels a et b, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.
4. Pour tout réels a et b $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
5. Pour tout entier $n\neq 0$, $\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.
6. Pour tout entier $n\neq 0$, $\dfrac{1}{n^3+3n^2+2n}=\dfrac{1/2}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1/2}{n+2}$.
7. Pour tout réel $x\neq\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{9x^2-1}{3x+1}=3x-1$.
8. Pour tout entier $n\geq 1$, $(x^n-x^{n-1})(x^n+x^{n-1})=x^{2n-2}(x-1)(x+1)$.
9. Pour tout réels x et y non nuls, $\dfrac{1-\dfrac{x}{y}}{\dfrac{y^2}{x}-x}=\dfrac{x}{y(y+x)}$.

Exercice 4

1. Résoudre le système d'équations suivant : $\left\{\ 3x-2y \quad = \quad 5\ x+y \quad = \quad 1\right.$
2. Résoudre le système d'équations suivant : $\left\{\ 7x+6y \quad = \quad 46\ 3x+9y \quad = \quad 39\right.$

Exercice 5

Pour chacune des suites u suivantes, calculer : (a) le troisième terme ; (b) le terme de rang 3 ; (c) u_4.

1. u est une suite de premier terme $u_1=-5$, et dont chaque terme (sauf le premier) est égal à l'inverse du précédent.
2. u est la suite définie pour $n\geq 0$ par : $u_n=\dfrac{1}{3}n+9$.
3. u est la suite définie pour $n\geq 2$ par :

$$\begin{cases} u_2=-6 \\ \text{Pour tout } n\geq 2 : u_{n+1}=\dfrac{4}{5}u_n. \end{cases}$$

Exercice 6

1. Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_0=2$ et de raison $r=4$. Déterminer u_{2012}.
2. Soit (v_n) la suite géométrique telle que $v_0=1$ et de raison $r=1,1$. Déterminer v_{2012}.

Exercice 7

Soit (a_n) la suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$ telle que $a_7=12$.

Calculer a_6, a_5, puis a_0.

Exercice 8

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région. Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

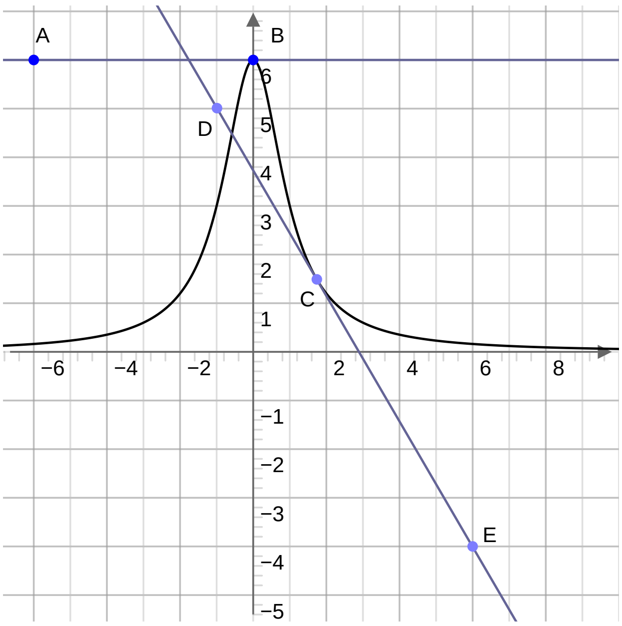
1. On considère le programme Python ci-dessous :

```python
C = 300
n = 0
while C < 400:
    C = C -C*0.08+50
    n = n+1
```

   Quelle valeur prend la variable n après exécution de cet algorithme ? On pourra utiliser la fonction *print*.
   Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.
2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014+n$. Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.
   a. Exprimer pour tout entier n le terme C_{n+1} en fonction de C_n.
   b. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = 625 - C_n$.
   Montrer que pour tout nombre entier n on a $V_{n+1} = 0,92 \times V_n$.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.
3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.
   a. Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question ?
   b. Donner une réponse à cette question de l'apiculteur.

Exercice 9

Dans le graphique ci-dessous on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f, ainsi que les droites (AB) et (ED) qui sont tangentes à $\mathcal{C}$ respectivement en 0 et $1,7$.
On a de plus les coordonnées suivantes :
$A(-6\,;6)$, $B(0\,;6)$, $C(1,7\,;1,5)$, $D(-1\,;5)$ et $E(6\,;-4)$.



Déterminer graphiquement $f(0)$, $f'(0)$, $f(1,7)$ et $f'(1,7)$.

Exercice 10

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions ci-dessous.

$f(x) = 2x - 2.$

$g(x) = x^2 + 1.$

$h(x) = 3x^2.$

$i(t) = 4t^2 - 3t + 8.$

$j(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6.$

$k(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 4.$

$l(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - 5.$

$m(t) = 0,3t^3 - 0,5t^2 + t - 1.$

$n(x) = (2x+3)(5-x).$

$p(x) = (3x^5 - 4x^3 + 3x - 1)(3x+4).$

$q(x) = \frac{7}{x}.$

$r(t) = \sqrt{3t}.$

$s(x) = (x+1)\sqrt{x}.$

$t(x) = \frac{x+1}{x+3}.$

$u(x) = \frac{3x-1}{5-2x}.$

$v(x) = \frac{x^2-1}{2x+7}.$

Exercice 11

Résoudre les équations suivantes :

1. $t^2 + 7t + 10 = 0.$
2. $-66z^2 + 43z + 9 = 0.$
3. $-t^2 + 9t = 0.$

Exercice 12

1. Étudier le signe du polynôme $P(x) = x^2 + 6x + 5$ sur $I = [0\,;5]$.
2. Étudier le signe du polynôme $Q(x) = x^2 + 4x + 4$ sur $I = [-5\,;5]$.
3. Étudier le signe du polynôme $R(x) = x^2 + 4x + 2$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 13

1. On considère la fonction g définie sur $I = [-2\,;10]$ par $g(t) = \frac{4t+2}{-t-3}$.
   a. Justifier que g est définie et dérivable sur I.
   b. Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [-2\,;10]$.
   c. En déduire le sens de variations de g sur I.
2. Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 9$ sur $[-10\,;10]$.

Exercice 14

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 8\,x + 16 + x^2.$

$Q(x) = 8\,x + x^2 - 4.$

$R(x) = -4 + 4\,x^2.$

$S(x) = 2\,x^2 - 8.$

$T(x) = 6\,x - 5 - x^2.$

$U(x) = -7\,x^2 - 5\,x.$

Exercice 15

1. Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = 3x^3 + 81x^2 + 729x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{5x-2}{-2x+2}$.

   a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   b. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}'_f$.
   c. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 16

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^8$

b. $\left(\mathrm{e}^6\right)^8$

c. $\dfrac{\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^{12} \times \mathrm{e}}$

d. $\left(\dfrac{\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^4}{\mathrm{e}}\right)^4$

Exercice 17

Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous.

$f(x) = \mathrm{e}^x$.
$g(x) = \mathrm{e}^{3x}$.
$h(x) = \mathrm{e}^{7-2x}$.
$i(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$.
$j(t) = 5\mathrm{e}^{1-2t}$.
$k(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$.
$\ell(t) = \dfrac{1-\mathrm{e}^t}{3t-1}$.

Exercice 18

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$.

a. $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^5$.
b. $\mathrm{e}^{3t+4} = \mathrm{e}^2$.
c. $\mathrm{e}^{5x} = \mathrm{e}$.
d. $\mathrm{e}^{2x+1} = 1$.
e. $\mathrm{e}^x < 1$.
f. $\mathrm{e}^{3x} \geq \mathrm{e}^2$.

Exercice 19

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.
On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (µg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.
Le modèle mathématique est : $g(t) = 20\left(\mathrm{e}^{-0{,}1t} - \mathrm{e}^{-t}\right)$, avec $t \in [0\,;+\infty[$.

1. Déterminer la concentration initiale $g(0)$.
2. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a :
   $g'(t) = 20\mathrm{e}^{-t}\left(1 - 0{,}1\mathrm{e}^{0{,}9t}\right)$.
3. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.
4. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieur à $0{,}2$ µg.L^{-1}.
   Compléter le programme Python ci-dessous pour déterminer le temps nécessaire à l'élimination de ce médicament à $0{,}1$ heure près.

```python
from math import*
def g(t):
    return 20*( exp(-0.1*t) - exp(-t))
t = 2
while g(t) >    :
    t = t +
print()
```

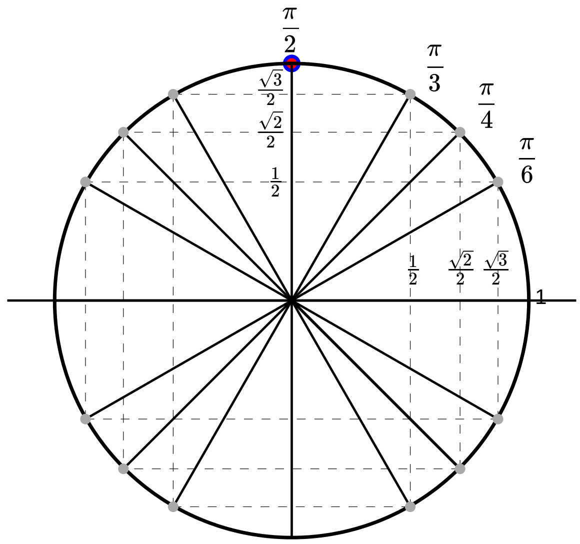
Exercice 20

1. Convertir les cinq mesures suivantes en radians : $172°$, $203°$, $154°$, $267°$ et $117°$.

2. Convertir les cinq mesures suivantes en degrés : $\dfrac{23\pi}{20}$, $\dfrac{74\pi}{45}$, $\dfrac{9\pi}{6}$, $\dfrac{245\pi}{180}$ et $\dfrac{17\pi}{12}$ rad.

3. Déterminer les mesures principales (c'est-à-dire entre $-\pi$, exclu, et π) des angles suivants en radians : $\dfrac{32\pi}{24}$, π, $\dfrac{21\pi}{20}$, $\dfrac{117\pi}{9}$ et $\dfrac{-41\pi}{24}$ rad.

4. Placer les angles suivants sur le cercle trigonométrique : π, $\dfrac{2\pi}{4}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{5\pi}{3}$ et $\dfrac{25\pi}{4}$ rad.



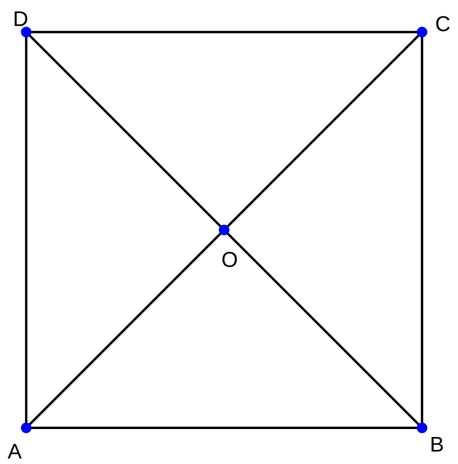
Exercice 21

Déterminer une valeur exacte des produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants. Les angles sont donnés en radians.

1. $AB = 1$, $AC = 3$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{6}$.
3. $AB = \dfrac{1}{4}$, $AC = 8$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 22

On considère un carré $ABCD$ de centre O et de côté c.



Calculer les produits scalaires suivants :

1. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
2. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})$
3. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$
4. $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AD})$
5. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$
6. $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$
7. $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})$
8. $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{OC})$
9. $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC})$

Exercice 23

Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(-10\,;4)$, $B(-4\,;1)$ et $C(-1\,;7)$.

1. En utilisant le produit scalaire, montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   Que peut-on en conclure pour le triangle ABC ?
3. Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

Exercice 24

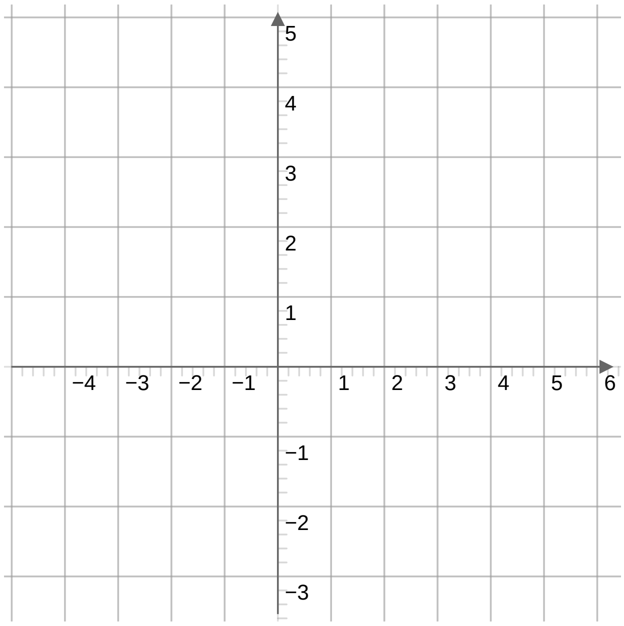
Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(-5\,;-1)$, $B(2\,;0)$ et $C(0\,;6)$.

1. Déterminer $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
2. En déduire une valeur approchée de la mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice 25

Dans un repère orthonormé du plan on considère la droite d_1 d'équation $x + 3y = 5$.

1. Construire dans le repère ci-dessous la droite d.
2. Déterminer une équation de la droite d_2 qui passe par $(0\,;0)$ et qui est perpendiculaire à d_1 .



Exercice 26

Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(-5\,;3)$ et $B(2\;-1)$.

1. Déterminer un vecteur directeur de la droite (AB).
2. En déduire une équation cartésienne de (AB).

Exercice 27

Dans un repère orthonormé du plan on considère le point $A(-2\,;6)$ et la droite d d'équation $x + y = 4$.

1. Déterminer l'ordonnée du point de d d'abscisse 3. On notera B ce point.
2. Existe-t-il un point C de d tel que le triangle ABC soit rectangle ?

Exercice 28

Dans un repère orthonormé du plan le point $A(4\,;-1)$. Donner une équation du cercle de centre A et de rayon 3.

Exercice 29

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :

R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Exercice 30

Une compagnie d’assurance auto propose deux types de contrat :

- un contrat « Tous risques » dont le montant annuel est de 500 €;
- un contrat « de base » dont le montant annuel est de 400 €.

En consultant le fichier clients de la compagnie, on recueille les données suivantes :

- 60 % des clients possèdent un véhicule récent (moins de 5 ans). Les autres clients ont un véhicule ancien ;
- parmi les clients possédant un véhicule récent, 70 % ont souscrit au contrat « Tous risques » ;
- parmi les clients possédant un véhicule ancien, 50 % ont souscrit au contrat « Tous risques ».

On considère un client choisi au hasard.
D’une manière générale, la probabilité d’un évènement A est notée $P(A)$ et son évènement contraire est noté $\overline{A}$.
On note les évènements suivants :

- R : « le client possède un véhicule récent »;
- T : « le client a souscrit au contrat "Tous risques ».

On note X la variable aléatoire qui donne le montant du contrat souscrit par un client.

1. Recopier et compléter l’arbre pondéré de probabilité traduisant les données de l’exercice.
2. Calculer la probabilité qu’un client pris au hasard possède un véhicule récent et ait souscrit au contrat « Tous risques », c’est-à-dire calculer $P(R \cap T)$.
3. Montrer que $P(T) = 0,62$.
4. La variable aléatoire X ne prend que deux valeurs a et b.
   Déterminer ces deux valeurs, puis les probabilités $P(X = a)$ et $P(X = b)$, et l’espérance de X.