Entrée en terminale générale
Spécialité mathématique

Préambule

Tu vas entrer en terminale en septembre prochain. Je te félicite pour ton passage !
Il est important que tu mesures que l'an prochain, au-delà de te préparer au bac, tu vas commencer à acquérir des connaissances et des méthodes de travail indispensables pour réussir dans **tes études supérieures**. Il est aussi important que tu fournisses des efforts réguliers pour que l'année de terminale soit un tremplin efficace pour te constituer une bonne base pour ton dossier d'orientation post-bac.
Aujourd'hui, pratiquement toutes les formations de l'enseignement supérieur sont sélectives via la plateforme Parcoursup et avoir ton bac ne te garantit pas d'avoir une place dans la formation de tes rêves.
Heureusement peu importe tes notes de première, l'appréciation de ton dossier se fera aussi en mesurant **tes progrès, ton sérieux et ta motivation** durant l'année de terminale.

L'objectif de ce livret de révisions est de te guider pour préparer ta rentrée en mathématiques. Car en effet il y aura une **évaluation** dès la première séance sur son contenu.
Tu ne seras pas seul(e) et livré(e) à toi-même. Si tu as des difficultés pour réussir un exercice (cela arrivera et c'est normal !) alors tu pourras, à tout moment, nous poser des questions cet été via le tchat à l'adresse suivante :

https://www.sarmate.xyz/Cours/Cahiers_de_vacances/2024/chat_TG/chat_vacances_TG.php

Le lien est disponible sur le site du lycée. Bien sûr, les enseignants qui te répondront seront comme toi en vacances, du coup on ne répondra pas toujours immédiatement en fonction de nos disponibilités mais on te répondra ! Dans l'attente de notre réponse, si tu n'as toujours pas d'idée pour avancer, il te suffira d'aborder un autre exercice.
Il y aura également un stage de pré-rentrée les 28 et 29 août auquel tu peux t'inscrire dès cette fin d'année scolaire.

À quel rythme dois-tu travailler avec ce fichier ?
Ce livret a été conçu comme un cahier de vacances. Tu es libre de le faire dans l'ordre que tu préfères et au rythme que tu veux. Il a été conçu pour que tu puisses travailler avec **un rythme moyen** d'un exercice tous les deux jours. Pour te motiver à chercher tous les exercices. Lors de la première séance à la rentrée le sujet du DST de mathématiques sera composé exclusivement d'exercices de cette liste. Donc, si tu sais tout bien faire, tu vas commencer l'année avec un 20/20. Pour t'aider, n'hésite pas à consulter ton cours de 2nde et de 1ère si tu peux. Il y a aussi d'excellentes ressources sur internet pour réviser. Voici deux liens utiles:

https://www.sarmate.xyz/ **https://www.maths-et-tiques.fr/**

Voilà, si tu lis cette ligne en ayant aussi lu tout ce qui précède alors tu as sûrement la qualité principale pour réussir: la motivation :).

Bonne préparation de la rentrée et bonnes vacances !

Exercice 1

1. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :
   $A = (3x-7)(2x+3)+(8-x)(7x+9)$.
   $B = (4x-9)^2$
2. Écrire les expressions suivantes sous la forme $a+b\sqrt{c}$, avec a, b et c des entiers, éventuellement nuls, c étant le plus petit possible.
   $A = \sqrt{18}$.
   $B = 5\sqrt{96}+\sqrt{24}+2\sqrt{54}$.
   $C = (2\sqrt{2}-\sqrt{7})^2$.
   $D = (3-3\sqrt{6})(3+3\sqrt{6})$
   $E = \dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

Exercice 2

Montrer que les égalités suivantes sont vraies.

1. Pour tout réels a et b non nuls, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$.
2. Pour tout réels a et b, $\dfrac{1}{4}\left((a+b)^2-(a-b)^2\right)=ab$.

3. Pour tout réels a et b, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.
4. Pour tout entier $n\neq 0$, $\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.
5. Pour tout entier $n\geq 1$, $(x^n-x^{n-1})(x^n+x^{n-1})=x^{2n-2}(x-1)(x+1)$.
6. Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x}{x+1}$.

Exercice 3

1. Résoudre sur sur $\mathbb{R}$ l'équation : $3x+\dfrac{2}{5}=-8x+\dfrac{1}{3}$.
2. Résoudre le système d'équations suivant : $\begin{cases} 3x-2y & = & 5 \\ x+y & = & 1 \end{cases}$
3. Résoudre le système d'équations suivant : $\begin{cases} 7x+6y & = & 46 \\ 3x+9y & = & 39 \end{cases}$

Exercice 4

1. Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_0=2$ et de raison $r=4$. Déterminer u_{2012}.
2. Soit (v_n) la suite géométrique telle que $v_0=1$ et de raison $r=1,1$. Déterminer v_{2012}
.

Exercice 5

Soit (a_n) la suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$ telle que $a_7=12$.

Calculer a_6, a_5, puis a_0.

Exercice 6

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région. Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère le programme Python ci-dessous :

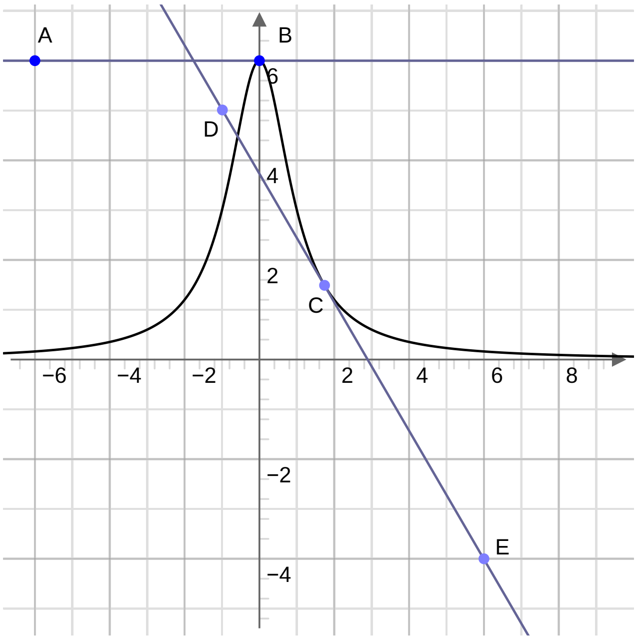
```python
C = 300
n = 0
while C < 400:
    C = C -C*0.08+50
    n = n+1
```

Quelle valeur prend la variable n après exécution de cet algorithme ? On pourra utiliser la fonction *print*.
Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014+n$. Ainsi $C_0=300$ est le nombre de colonies en 2014.
   a. Exprimer pour tout entier n le terme C_{n+1} en fonction de C_n.
   b. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n=625-C_n$.
   Montrer que pour tout nombre entier n on a $V_{n+1}=0,92\times V_n$.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $C_n=625-325\times 0,92^n$.
3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.
   a. Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question ?
   b. Donner une réponse à cette question de l'apiculteur.

Exercice 7

Dans le graphique ci-dessous on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f, ainsi que les droites (AB) et (ED) qui sont tangentes à $\mathcal{C}$ respectivement en 0 et $1,7$.
On a de plus les coordonnées suivantes :
$A(-6\,;6)$, $B(0\,;6)$, $C(1,7\,;1,5)$, $D(-1\,;5)$ et $E(6\,;-4)$.



Déterminer graphiquement $f(0)$, $f'(0)$, $f(1,7)$ et $f'(1,7)$.

Exercice 8

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions ci-dessous.

$f(x) = 2x - 2.$

$g(t) = 4t^2 - 3t + 8.$

$h(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6.$

$i(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 4.$

$j(x) = (3x^5 - 4x^3 + 3x - 1)(3x + 4).$

$k(x) = \dfrac{7}{x}.$

$\ell(t) = \sqrt{3t}.$

$m(x) = (x+1)\sqrt{x}.$

$n(x) = \dfrac{3x - 1}{5 - 2x}.$

$p(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 7}.$

$q(x) = \mathrm{e}^x.$

$r(x) = \mathrm{e}^{3x}.$

$s(x) = \mathrm{e}^{7-2x}.$

$w(x) = (x+1)\mathrm{e}^x.$

Exercice 9

1. Déterminer les racines des polynômes :
   $P(x) = x^2 + 3x - 9.$
   $Q(x) = 8x + x^2 - 4.$
   $R(x) = -7\,x^2 + 5\,x.$

2. Résoudre les équations suivantes :
   a. $t^2 + 7t + 10 = 0.$
   b. $-66z^2 + 43z + 9 = 0.$
   c. $-t^2 + 9t = 0.$

Exercice 10

1. Étudier le signe du polynôme $P(x) = x^2 + 6x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier le signe du polynôme $Q(x) = -x^2 + 4x - 4$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier le signe du polynôme $R(x) = -x^2 - 4x - 20$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

1. On considère la fonction g définie sur $I = [-2\,;10]$ par $g(t) = \dfrac{4t+2}{-t-3}$.
   a. Justifier que g est définie et dérivable sur I.
   b. Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [-2\,;10]$.
   c. En déduire le sens de variations de g sur I.
2. Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 9$ sur $[-10\,;10]$.

Exercice 12

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^8$

b. $\left(\mathrm{e}^6\right)^8$

c. $\dfrac{\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^{12} \times \mathrm{e}}$

d. $\left(\dfrac{\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^4}{\mathrm{e}}\right)^4$

Exercice 13

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$.

a. $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^5$.
b. $\mathrm{e}^{3t+4} = \mathrm{e}^2$.
c. $\mathrm{e}^{5x} = \mathrm{e}$.
d. $\mathrm{e}^{2x+1} = 1$.
e. $\mathrm{e}^x < 1$.
f. $\mathrm{e}^{3x} \geq \mathrm{e}^2$.

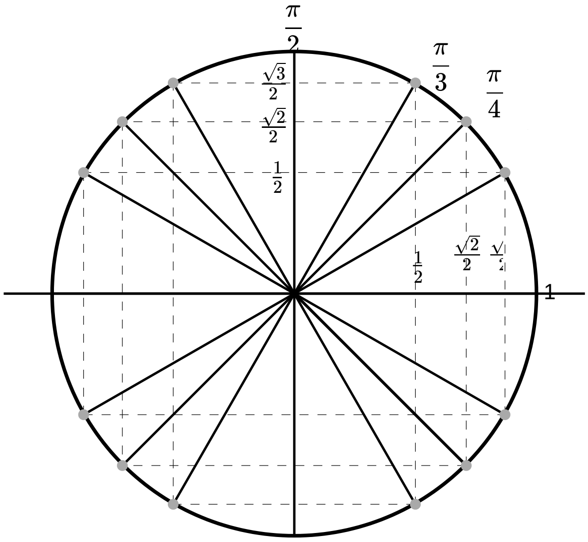
Exercice 14

On ne sait pas résoudre l'équation $\mathrm{e}^{x^3} = 10\,000$.
Compléter l'algorithme Python ci-dessous pour qu'il permette d'obtenir une valeur approchée à 10^{-3} de cette équation.

```python
from math import*

def f(x):
    return exp(x** )

x = 0

while f(x) <   :
    x = x + 0.001

print(x)
```

Exercice 15

1. Convertir les cinq mesures suivantes en radians : $172°$, $203°$, $154°$, $267°$ et $117°$.
2. Convertir les cinq mesures suivantes en degrés : $\dfrac{23\pi}{20}$, $\dfrac{74\pi}{45}$, $\dfrac{9\pi}{6}$, $\dfrac{245\pi}{180}$ et $\dfrac{17\pi}{12}$ rad.
3. Déterminer les mesures principales (c'est-à-dire entre $-\pi$, exclu, et π) des angles suivants en radians : $\dfrac{32\pi}{24}$, 3π, $\dfrac{21\pi}{20}$, $\dfrac{117\pi}{9}$ et $\dfrac{-41\pi}{24}$ rad.
4. Placer les angles suivants sur le cercle trigonométrique : π, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{25\pi}{4}$ rad.



Exercice 16

Déterminer une valeur exacte des produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants. Les angles sont donnés en radians.

1. $AB = 1$, $AC = 3$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{6}$.
3. $AB = \dfrac{1}{4}$, $AC = 8$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 17

Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(-10\,;4)$, $B(-4\,;1)$ et $C(-1\,;7)$.

1. En utilisant le produit scalaire, montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   Que peut-on en conclure pour le triangle ABC ?
3. Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

Exercice 18

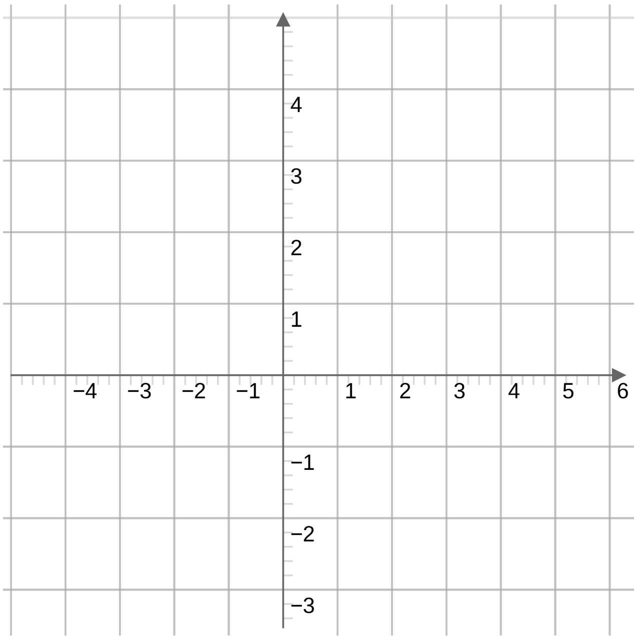
Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(-5\,;-1)$, $B(2\,;0)$ et $C(0\,;6)$.

1. Déterminer $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
2. En déduire une valeur approchée de la mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice 19

Dans un repère orthonormé du plan on considère la droite d_1 d'équation $x + 3y = 5$.

1. Construire dans le repère ci-dessous la droite d.
2. Déterminer une équation de la droite d_2 qui passe par $(0\,;0)$ et qui est perpendiculaire à d_1.



Exercice 20

Dans un repère orthonormé du plan on considère les points $A(-5\,;3)$ et $B(2\ -1)$.

1. Déterminer un vecteur directeur de la droite (AB).
2. En déduire une équation cartésienne de (AB).

Exercice 21

Dans un repère orthonormé du plan le point $A(4\,;-1)$.
Donner une équation du cercle de centre A et de rayon 3.

Exercice 22

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	4
$P(X=k)$	$0,35$		$0,20$	$0,20$

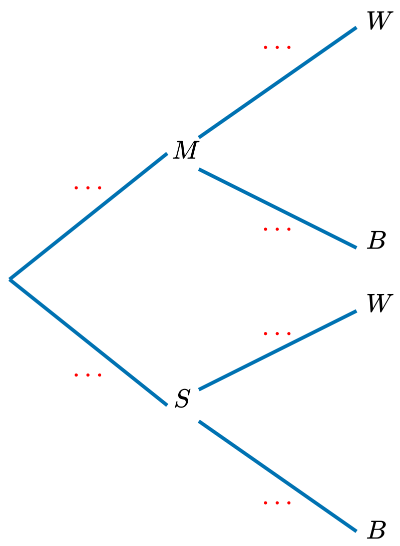
1. Compléter le tableau.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Déterminer $P(X \leq 2)$ et $P(X > 3)$.

Exercice 23

Un food truck, ouvert le midi et le soir, propose deux types de formules : la formule Burger et la formule Wok. Le gérant a remarqué que 75 % de ses ventes ont lieu le midi. Le quart des ventes du midi correspondent à la formule Burger, alors que 40 % des ventes du soir correspondent à la formule Wok.
Le gérant se constitue un fichier en notant, pour chaque vente, la formule choisie et le moment de cette vente (midi ou soir).
On prélève une fiche de façon équiprobable. On définit les quatre évènements suivants :

- M : « La fiche correspond à une vente du midi » ;
- S : « La fiche correspond à une vente du soir » ;
- W : « La fiche correspond à une formule Wok » ;
- B : « La fiche correspond à une formule Burger ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap W$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Montrer que la probabilité que la fiche choisie corresponde à une formule Burger est égale à $0,337\,5$.
4. On a prélevé une fiche correspondant à la formule Burger. Quelle est la probabilité, à près, que la vente ait eu lieu le soir ?