

Vecteurs du plan (2)

Tout objet géométrique peut être représenté dans un repère. Il en est de même pour les vecteurs et nous allons apprendre dans ce chapitre avec quelles formules cela se fait. Nous découvrirons alors des méthodes vectorielles qui permettront de simplifier les démonstrations.

1 Coordonnées d'un vecteur

Définition 1

Dans un repère du plan, dont l'origine est noté O ,

Remarque 1

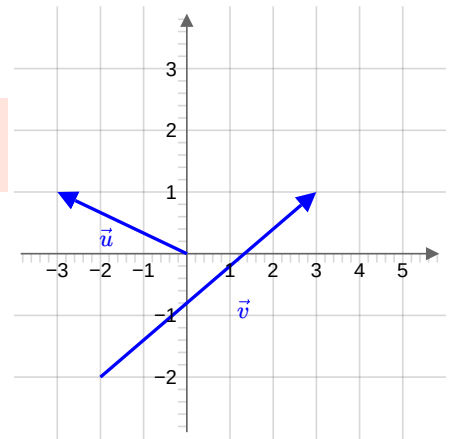
Si un point M est de coordonnées $(x; y)$, alors le vecteur \vec{u} défini par

pourra se noter :

Exercice 1

Trouver les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \vec{v} tracés dans le repère ci-dessous :

Correction



Remarque 2

Le vecteur nul a pour coordonnées

Propriété 1

Remarque 3

Cette propriété peut s'écrire également de la manière suivante :

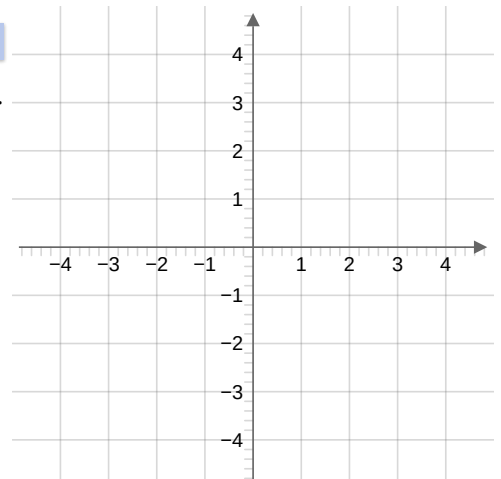
Propriété 2

Soient x, y, x' et y' quatre nombres réels.

Deux vecteurs et sont égaux si, et seulement si,

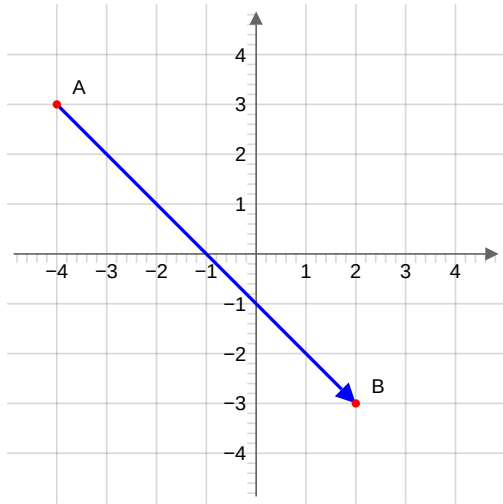
Exercice 2

Construire dans le repère ci-dessous deux représentants du vecteur de coordonnées $(3; -1)$.



Exercice 3

À partir du repère ci-dessous, noter les coordonnées des points A et B , puis du vecteur \overrightarrow{AB} . Que remarque-t-on ?



A	B	\overrightarrow{AB}

Propriété 3

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'un repère du plan.

Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont :

Exercice 4

Trouver les coordonnées du vecteur \overrightarrow{MN} avec $M(3; -1)$ et $N(-2; 4)$.

Correction

Propriété 4 -- Somme de vecteurs

Soient x, y, x' et y' quatre nombres réels et soient \vec{u} et \vec{v} les vecteurs de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ d'un repère du plan.

On a alors que le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :

Preuve

On peut donc affirmer que les coordonnées de la somme de deux vecteurs est bien la somme des coordonnées de ces vecteurs.

2 Norme d'un vecteur

Propriété 5

Soit $\vec{u}(x; y)$ un vecteur du plan. On a alors que :

Preuve

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points tels que

On sait que $x =$ et $y =$

On a alors que $\|\vec{u}\| =$

Exemple 1

La norme du vecteur $\vec{u}(3; -2)$ vaut

3 Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition 2

Exemple 2

En reprenant le vecteur $\overrightarrow{MN}(-5; 5)$ du dernier exercice, nous avons par exemple que a pour coordonnées

Propriété 6

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur et un nombre réel. On définit le point C par la relation on a alors :

-
-
-

Propriété 7

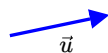
-
- On note le vecteur . On alors que :
-
-
-

4 Vecteurs colinéaires

Définition 3

Dire que deux vecteurs

Exemple 3



Définition 4

Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs du plan. On définit le déterminant des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ par :

Exemple 4

Pour $\vec{v}(5; -2)$ et $\vec{w}(-1; -4)$ on a $\det(\vec{v}, \vec{w}) =$

Propriété 8

Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ d'un repère du plan sont linéairement indépendants si et seulement si :

c'est-à-dire, si et seulement si :

Preuve

Le vecteur \vec{u} a pour coordonnées $(x; y)$, et puisque \vec{v} est colinéaire à \vec{u} , il existe un réel λ tel que \vec{v} ait pour coordonnées $(\lambda x; \lambda y)$.

Ainsi le tableau des coordonnées de ces vecteurs $\begin{pmatrix} x & y \\ \lambda x & \lambda y \end{pmatrix}$ est identique à $\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$.

Nous remarquons que le dernier est un tableau de rang 1, le premier l'est donc aussi et la règle du produit en croix nous donne bien que :

Remarque 4

On peut également noter les coordonnées d'un vecteur en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ plutôt qu'en $(x; y)$. On pourra écrire donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à la place de $\vec{u}(x; y)$.

On fera attention à ne pas confondre cette notation avec l'écriture d'une fraction.

Propriété 9

Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.