2nde ~ Devoir maison n°8

1. Écrire sous forme de fraction irréductible, en donnant les étapes, le nombre $a = \dfrac{588}{1\,134}$.

2. Écrire sous forme de fraction irréductible, en donnant les étapes, le nombre $b = \dfrac{3 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{5}{6}}$.

3. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{5}{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
   a. Écrire sous forme de fraction irréductible, en donnant les étapes, le nombre $f(3)$.
   b. Écrire sous la forme $a\sqrt{5} + b$, avec a et b des entiers (en donnant les étapes), le nombre $f(\sqrt{5})$.
   c. Le point $(1\,;7)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$.
   d. Donner un point à coordonnées entières qui appartient à $\mathcal{C}_f$.
   e. Expliquer pourquoi, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $|f(x)| = f(x)$.
4. Développer l'expression $A(x) = (3x - 4)(5 - 6x)$.
5. Développer l'expression $B(x) = (3x - 4)(4 - 6x) + 5(2x - 8)$.
6. Pour tout réel x on a $C(x) = x^2 - 7$.
   a. Montrer que pour tout x, $C(x) = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$.
   b. Résoudre alors l'équation $C(x) = 0$.
7. Dans un repère orthonormé du plan on considère les trois points $A(1\,;0)$ $B(3\,;5)$ et $C(6\,;14)$.
   a. Déterminer les longueurs AB, AC et BC.
   b. Ces trois points sont-ils alignés ? La réponse sera justifiée par un calcul.
8. Soit f et g les deux fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 4$ et $g(x) = 4x + 7$.
   a. Donner, en justifiant, le sens de variations de chacune de ces fonctions.
   b. Déterminer les coordoonées du point d'intersection des courbes représentatives de ces deux fonctions dans un repère du plan.
   c. Existe-t-il une valeur de x telle que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 2$?

9. Montrer que pour tous nombres réels x et y nous tous deux nuls, on a : $\dfrac{(x-y)^2 + (x+y)^2}{2(x^2+y^2)} = 1$.

10. Pour tous réels a et b, montrer que : $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$.

11. Soit x un nombre réel strictement positif. Montrer que $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}} = \dfrac{x+1}{2x+1}$.

12. Montrer que pour tous nombres réels a et b on a : $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.