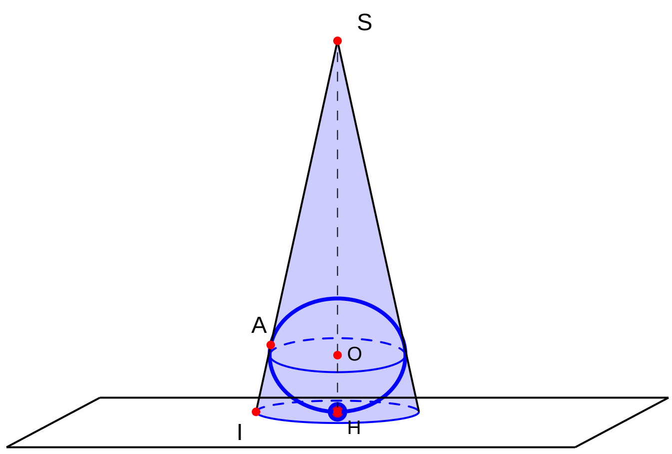
2nde ~ DM
Optimisation

Le but de ce devoir est, dans une situation géométrique donnée, de calculer un volume en fonction d'un paramètre x. À l'aide d'un graphique nous pourrons alors conjecturer la valeur minimale de ce volume qui dépend de x.

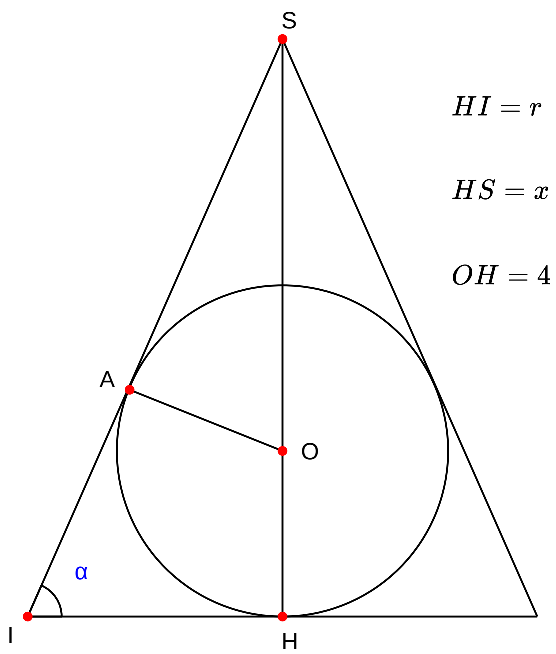
Description de la situation
Une sphère de rayon 4 est placée sur un plan horizontale $\mathscr{P}$. Le point de contact entre le plan et la sphère est noté H. Sur la perpendiculaire au plan passant par H on place un point S au delà du "pôle nord" de la sphère. (donc $SH > 8$) On trace un cône de sommet S, et de disque de base reposant sur $\mathscr{P}$, de telle sorte que ce cône soit tangent à la sphère. On note $HS = x$, avec $x > 8$, et $HI = r$, avec r à déterminer, mais qui se modifie lorsque x change.



Pour les trois premières questions on déplacera le point S dans la figure présente sur le site.

1. Lorsque le point S monte que fait le point I ? Lorsque x augmente que fait donc le nombre r ?
2. Lorsque le point S se rapproche du pôle nord de la sphère que fait le point I ? Que font x et r dans cette situation ?
3. Expliquer pourquoi le volume du cône dépend de la valeur de x.

On cherche maintenant à déterminer la valeur minimale du volume V du cône. Pour cela nous allons tout d'abord raisonner dans la figure suivante, qui est une coupe de la figure précédente.



4. *Pour la question suivante, on pourra s'aider de recherches sur les cercles et les droites.*

   a. En combien de points la droite (IS) coupe-t-elle le cercle de centre O et de rayon 4 ?
   b. Que représente donc la droite (IS) pour ce cercle ?
   c. Que peut-on dire des droites (IS) et (OA) ? On justifiera la réponse en utilisant une propriété.
   d. Quelle est donc la nature du triangle AOS ?

5. Montrer alors que $AS^2 = x^2 - 8x$.
6. Montrer que $\widehat{AOS} = \alpha$
7. En exprimant $\tan(\alpha)$ de deux manières différentes montrer que : $\dfrac{x}{r} = \dfrac{AS}{4}$.
8. En déduire que : $r^2 = \dfrac{16x}{x-8}$.
9. Montrer alors que le volume V du cône est donné par la formule : $V(x) = \dfrac{16\pi}{3}\dfrac{x^2}{x-8}$.
10. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivants :

x	$8,1$	$8,2$	$8,5$	9	10	11	12	13	14
$V(x)$									

11. À l'aide de ce tableau de valeurs, tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative du volume V. On fera attention à bien adapter les unités.
12. À l'aide de la courbe précédente trouver à quelle hauteur nous devons placer S pour que le volume du cône soit minimal.
13. Quel est alors le volume du cône ?

Pour faire ce devoir maison vous aurez besoin de :

- La formule de l'aire d'un disque.
- Celle du volume d'un cône.
- De la définition et d'une propriété sur la tangente à un cercle.
- Que la somme des mesures des angles d'un triangle fait ...
- Des formules de trigonométries.
- Des identités remarquables.
- De la manière dont on a tracé les courbes en classe.