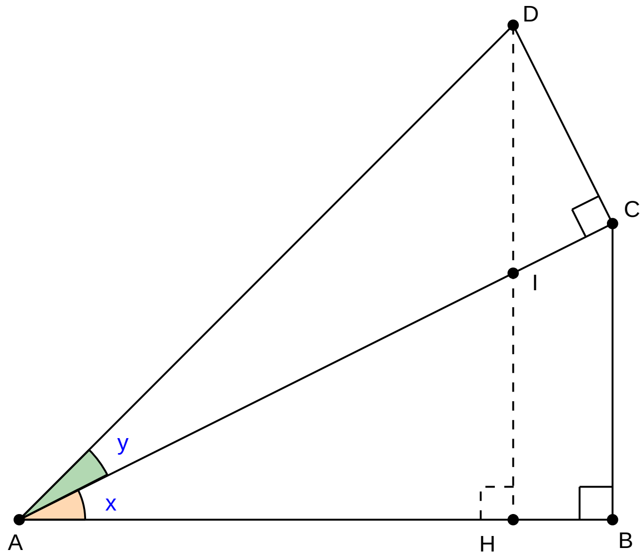
2nde ∼ DM n°13

Dans la figure ci-dessous les triangles ABC et ACD sont rectangles respectivement en B et C.
Le point H est le projeté orthogonal de D sur (AB) et on note I l'intersection entre (DH) et (AB).
On note x et y les mesures respectives des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAD}$.



1. Exprimer $\dfrac{AB}{AC}$ et $\dfrac{AC}{AD}$ en fonction de x et y. En déduire que $\dfrac{AB}{AD} = \cos(x)\cos(y)$.
2. Exprimer $\cos(x+y)$ en fonction de AH et AD.
3. Montrer que $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AB}{AD} - \dfrac{HB}{AD}$.
4. Construire la parallèle à (AB) passant par C. Elle coupe (DH) en J.
5. Exprimer la mesure des angles : $\widehat{AIH}$, $\widehat{DIC}$ et $\widehat{JDC}$ en fonction de x et y. En déduire la valeur de $\dfrac{HB}{CD}$.
6. Montrer que : $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{\sin(y)}{CD}$.
7. En déduire que : $\dfrac{HB}{AD} = \sin(x)\sin(y)$.
8. En utilisant tous les résultats obtenus précédemment démontrer que :
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$
9. En se replaçant dans le triangle ABC, et en utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que :
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$
Remarque : on note $\cos^2(t)$ le nombre $(\cos(x))^2$.
10. En utilisant les deux formules précédentes, démontrer que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
11. En déduire l'expression de $\cos^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$.