

Ensembles de nombres ~ Calcul littéral ~ Racine carrée

Exercice 1

Déterminer le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} & b &= \frac{10-4}{3} & c &= \sqrt{5} & d &= -\sqrt{16} \\ e &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} & f &= \frac{91}{7} & g &= \sqrt{98} - \sqrt{18} - 2\sqrt{2} & h &= \frac{51}{3} - \sqrt{289} \end{aligned}$$

Exercice 2

Le but de cet exercice est de démontrer que le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

1. À quels ensembles de nombres appartient $\frac{1}{3}$?

2. Nous allons supposer que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal et obtenir à la fin de notre raisonnement une contradiction.

a. Comment s'appelle un tel type de raisonnement ?

b. On suppose donc qu'il existe deux entiers naturels a et n tels que : $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.

Montrer alors que $10^n = 3a$.

c. Pourquoi l'égalité $10^n = 3a$ ne peut-elle jamais être vraie ? On pourra raisonner par rapport aux tables de multiplications.

d. Conclure.

Exercice 3

À l'aide des formules de distributivité démontrer les identités remarquables.

Exercice 4

Développer réduire et ordonner les expressions suivantes.

$$f(x) = (x+1)^2$$

$$g(t) = (t-1)^2$$

$$h(x) = (x+3)(x-3)$$

$$i(x) = (2x - \sqrt{5})(2x + \sqrt{5})$$

$$j(t) = \left(\frac{2}{3} - t\right)(6+t)$$

$$k(x) = 3(2x-5)(7x+8)$$

$$\ell(x) = (5x+3)(x^2+2x-3)$$

$$m(x) = \frac{1}{2}x(2x-5)^2$$

Exercice 5

1. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{2}$, avec $a \in \mathbb{Q}$.

$$x_1 = \sqrt{200}$$

$$x_2 = 3\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}$$

2. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{3}$, avec $a \in \mathbb{Q}$.

$$y_1 = \sqrt{12} - 8\sqrt{48}$$

$$y_2 = \frac{13}{4\sqrt{147}}$$

3. L'égalité $\frac{3}{6 - \sqrt{35}} = 18 + 3\sqrt{35}$ est-elle vraie ?

4. L'affirmation $\frac{5}{3 + \frac{3}{7}} - \frac{2 + \frac{1}{3}}{4} \in \mathbb{D}$ est-elle vraie ?

Exercice 6

Factoriser les expressions suivantes.

$$f(x) = 3x + 2x^2$$

$$i(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x$$

$$g(t) = t^2 - t$$

$$j(t) = t^5 - t^3 + 41t$$

Exercice 7

1. Construire un triangle rectangle, dont les côtés adjacents à l'angle droit mesurent 1 cm.
2. Vérifier alors que l'hypothénuse de ce triangle mesure $\sqrt{2}$.
3. Sur votre figure mesurer à la règle la longueur de l'hypothénuse, et donner alors une approximation du nombre $\sqrt{2}$.
4. Nous voyons que cette méthode n'est pas très précise. Essayons de faire mieux. Pour cela, construire un triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit mesurent 10 cm.
5. Grâce à cette configuration trouver une valeur approchée plus précise de $\sqrt{2}$.
6. Peut-on encore améliorer la précision en poussant plus loin cette méthode ? Quelles sont ses limites ?
7. Héron d'Alexandrie, mathématicien du 1^{er} siècle de notre ère, a utilisé une méthode très performante pour approcher le nombre $\sqrt{2}$. En voici la description :

Méthode de Héron

Pour pouvoir trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$, on choisit un nombre entier entre 1 et 10. On ajoute à la moitié de ce nombre son inverse.

On obtient alors un nouveau nombre à partir duquel on effectue les mêmes opérations.

On réitère le procédé jusqu'à obtenir une approximation satisfaisante.

- a. Déterminer la fraction obtenue par cette méthode en choisissant 2 au départ et en effectuant trois itérations.
- b. Modifier l'algorithme ci-dessous pour qu'il effectue 10 itérations de la méthode de Héron.

```
1 n = 3.0
2 print(n)
3
4 for i in range(1,5):
5     n = n/2
6     print(n)
```

- c. Donner une valeur approchée à 10^{-5} de $\sqrt{2}$.

Exercice 8

Soient a et b deux nombres réels positifs.

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = \sqrt{a}$ et $AC = \sqrt{b}$.

1. Comparer les nombres $AB + AC$ et BC .
2. Montrer que $BC = \sqrt{a + b}$.
3. Comparer alors les nombres $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a + b}$.