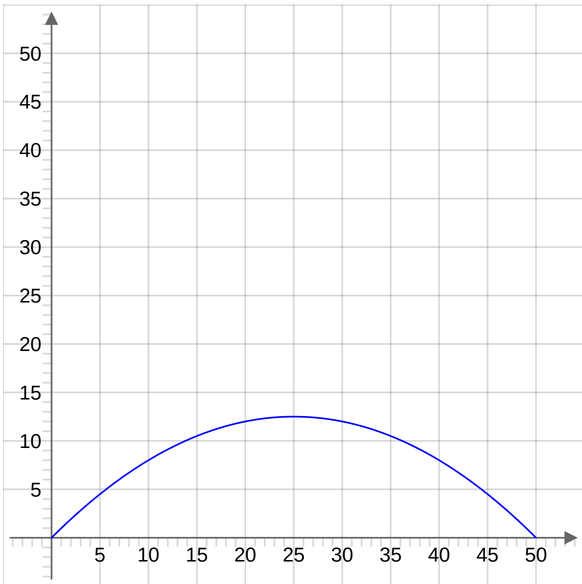
Compléments

Exercice 1

Une grande ville est traversée par un fleuve d'une largeur de 50 mètres. Le maire de cette ville souhaite construire un pont au dessus du cours d'eau.
Ce pont doit respecter les trois conditions suivantes :

- sa hauteur maximale doit être comprise entre 11 et 13 mètres,
- pendant plus de 55% de la largeur du fleuve, sa hauteur doit être au-delà de 8 mètres,
- la longueur du pont doit mesurer entre 55 et 60 mètres.

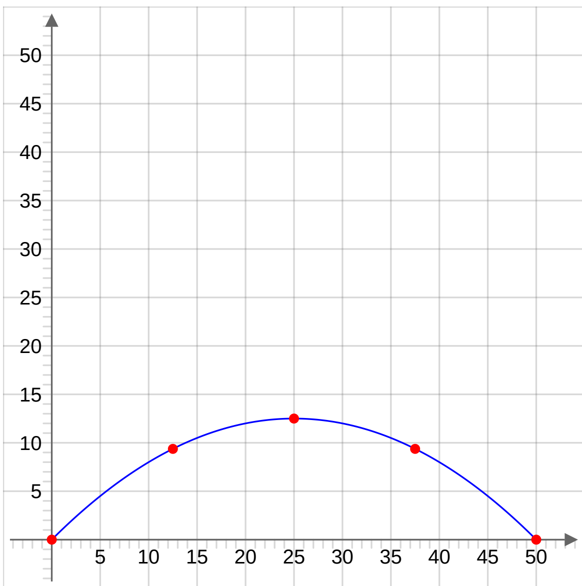
Un célèbre architecte propose une courbe mathématique pour construire ce pont. Voici sa modélisation :



$h(x) = -0,02x^2 + x$

L'axe des abscisse représente les longueurs suivant une coupe transversale du fleuve et l'axe des ordonnées la hauteur par rapport au sol.
Le but de l'exercice est de vérifier si le projet de pont proposé par ce célèbre architecte vérifie les trois conditions requises.

1. **Condition 1 : la hauteur du pont**
   a. Montrer que pour tout réel x, $h(x) = 0,02(625 - (25 - x)^2)$.
   b. Trouver alors la hauteur maximale du pont et conclure sur la condition.
2. **Condition 2 : hauteur au-delà de 8 mètres**
   a. Montrer que $h(x) - 8 = -0,02(x - 10)(x - 40)$.
   b. Résoudre alors l'inéquation $h(x) \geq 8$.
   c. Conclure.
3. **Condition 3 : la longueur du pont** L'architecte ne connaît pas de formule pour calculer la longueur du pont. Il décide donc de trouver une valeur approchée de cette longueur. Voici sa méthode.
   Il choisit cinq points, répartis de manière homogène sur le pont.



Il souhaite calculer ensuite la longueur de la chaine brisée $A_1A_2A_3A_4A_5$

a. Remplir le tableau suivant (on pourra arrondir les résultats à 10^{-1}).

i	Coordonnées de A_i	Coordonnées de A_{i+1}	Longueur de $[A_iA_{i+1}]$	Longueur de la chaine de A_1 jusqu'à A_{i+1}
1				
2				
3				
4				

b. L'architecte se dit que cinq points ne suffisent pas. Il décide donc d'écrire un algorithme pour en choisir plus et ne pas avoir à faire trop de calculs lui-même.

```
L = 0
Pour i allant de 0 jusqu'à 19,
    a = i*50/20
    b = (i+1)*50/20
    L = √( (a-b)² + (h(a) - h(b))² )
Fin de boucle pour

Afficher L
```

Combien de points a-t-il choisi ?

c. Une erreur se trouve dans son algorithme à l'intérieur de la boucle for. Corriger la.

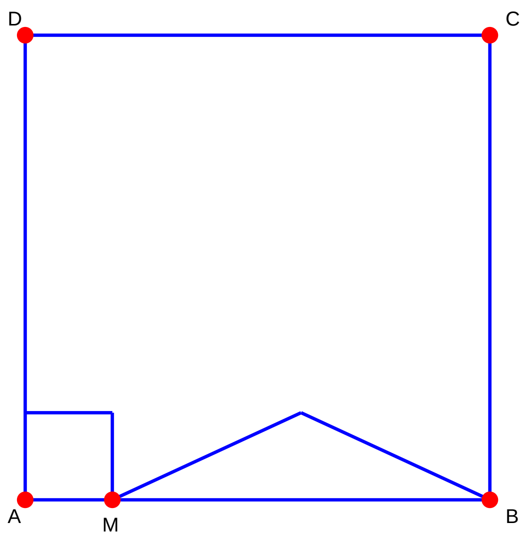
d. Programmer cet algorithme en Python et et conclure sur la troisième condition.

```python
from math import*


def h(x):
  return 0.05*x**2+x

L = 0
```

Exercice 2



Le carré $ABCD$ a un côté de longueur 8 cm. M est un point du segment $[AB]$ On dessine comme ci-contre dans le carré $ABCD$:

- un carré de côté $[AM]$.
- un triangle isocèle de base $[MB]$ et dont la hauteur a même mesure que le côté $[AM]$ du carré.

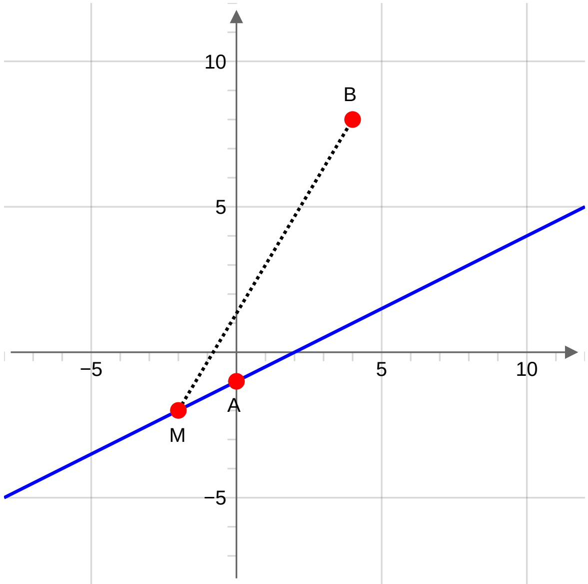
1. Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du triangle soit égale à celle du carrée ?
2. Quelle est l'aire maximale du triangle ?

Exercice 3

1. Dans un repère orthonormé du plan, placer les neufs points à coordonnées entières comprises entre 0 et 2.
2. L'entier m est choisi au hasard parmi 0, 1 et -1 de manière équiprobable. L'entier p est choisi au hasard parmi 0, 1 et 2.
   a. Donner toutes les valeurs possibles pour le couple de nombres $(m; p)$.
   b. Quelle est la probabilité pour que la droite d'équation $y = mx + p$ passe par l'un des points du nuage de points tracé ?

Exercice 4

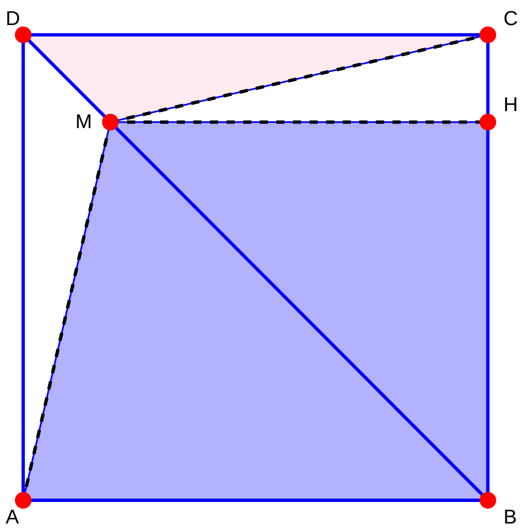
Dans un repère du plan on considère la droite d d'équation réduite $y = \dfrac{1}{2}x - 1$, le point $A(0; -1)$ et $B(4; 8)$.
On considère de plus un point $M(x; y)$ mobile sur d. On cherche à déterminer les coordonnées de M pour que la distance BM soit minimale.



1. Expliquer pourquoi est-ce que chercher le minimum de la distance BM revient à chercher le minimum de BM^2.
2. Montrer que pour tout réel x, $BM^2 = \dfrac{5}{4}x^2 - 17x + 97$.
3. Montrer alors que $BM^2 = \dfrac{5}{4}\left(\left(x - \dfrac{34}{5}\right)^2 - \dfrac{304}{5}\right)$.
4. Pour quelle valeur de x la distance BM est-elle donc minimale ? On note H le point répondant à cette question.
5. Quelle est la nature du triangle ABH ?

Exercice 5

$ABCD$ est un carré de côté 4. M est un point variable du segment $[BD]$.
Le point H est le projeté orthogonal de M sur $[BC]$. On pose $BH = x$.



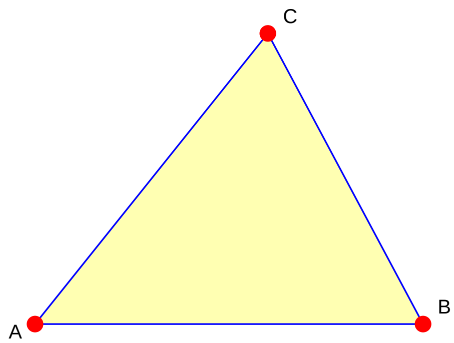
1. Quelles sont les valeurs prises par x ?
2. Démontrer que $HM = x$.
3. On note $f(x)$ l'aire du trapèze $ABHM$. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
4. On note $g(x)$ l'aire du triangle CDM. Exprimer $g(x)$ en fonction de x.
5. On affirme que l'aire du trapèze est supérieure à l'aire du carré dans 80% des cas. Etudier cette affirmation.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Soient a et b deux réels positifs tels que $a \leq b$.
   a. À l'aide d'une identité remarquable factoriser $f(b) - f(a)$.
   b. En déduire le signe de $f(b) - f(a)$, et comparer alors $f(a)$ et $f(b)$.
   c. Que peut-on en conclure pour la fonction f sur $[0; +\infty[$?
2. Soient a et b deux réels négatifs tels que $a \leq b$.
   a. Déterminer le signe de $f(b) - f(a)$.
   b. Qu'en conclure pour la fonction f sur $]-\infty; 0]$?

Exercice 7



On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Donner les coordonnées de A, B et C.
2. En déduire les coordonnées de C', B' et A' les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.
3. Montrer que la droite (AA') a pour équation réduite $y = x$.
4. Déterminer les équations réduites des droites (BB') et (CC').
5. Déterminer les coordonnées de G point d'intersection entre (AA') et (BB').
6. G est-il un point de (CC') ?

Exercice 8

Le jeu du *Lièvre et de la tortue* est un jeu de dé qui se déroule de la sorte :

- deux personne s'affrontent, une joue le rôle du lièvre, l'autre de la tortue;
- une personne lance un dé à six faces;
- si la face 6 sort le lièvre gagne;
- si une autre face sort la tortue marque un point et on relance le dé en appliquant les mêmes règles;
- si la tortue arrive à 5 points elle gagne.

Vous devez disputer une partie quel rôle choisissez-vous pour avoir le plus de chance de gagner ?