Études de signes

1 Rappels

Les deux propriétés suivantes, énoncées dans le chapitre 2 (fonctions affines), nous serons utiles dans ce cours.

Propriété 1

Soient a et b deux réels, et soit f la fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

Remarque 1

Dans ce chapitre la valeur qui annule une expression affine de la forme $ax + b$ pourra être appelée

Propriété 2

Soient a et b deux réels, et soit f la fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

- Si alors :

- Si alors :

Exercice 1

Dresser le tableau de signes de la fonction affine g, définie pour tout réel x par $g(x) = 3 - 6x$.

Correction

La fonction affine g s'annule en

Son tableau de signe est :

2 Signe d'un polynôme du second degré

Définition 1

Une expression algébrique $A(x)$ est dîte du second degré s'il existe trois nombres réels a, b et c, avec $a \neq 0$, tels que :

$$A(x) = ax^2 + bx + c.$$

On peut également dire que A est un

Exemple 1

Les fonctions f et g définies pour tout réel x par $f(x) = -5x^2 - 3x + 4$ et $g(x) = (2 - x)(3 + x)$ sont des

C'est en effet évident pour f. Pour g il suffit de son expression :
$g(x) =$

Propriété 3

Soit un polynôme du degré p dont on connaît la forme factorisée :

avec a, b, c et d des nombres a et c
Pour déterminer le du polynôme p sur $\mathbb{R}$, il suffit de déterminer le signe de chacun de ses deux et d'appliquer la régle des

Remarque 2

Comme nous allons le voir dans l'exemple ci-dessous, l'utilisation d'un tableau de facilite grandement la rédaction. Par ailleurs, le signe de chacun des facteurs s'obtient en utilisant la propriété n° et en déterminant donc le signe des

Exemple 2

Soit le polynôme q défini pour tout réel x par $q(x) = (3x - 4)(7 + x)$.
Pour dresser le tableau de signes de q il nous faut tout d'abord déterminer les valeurs de x qui annulent chacun de ses facteurs.

Valeurs charnières

$3x - 4 = 0$ $7 + x = 0$

Remarque 3

On peut trouver directement les valeurs charnières en utilisant la formule » rappelée dans la propriété

On peut maintenant dresser le tableau de signes de q en utilisant les résultats rappelés dans le premier paragraphe, notamment la propriété Il nous suffit donc de déterminer le signe des de chaque facteur de q.

Explications

- La première ligne s'obtient à partir de la recherche des valeurs
- Les deuxièmes et troisièmes lignes s'obtiennent en étudiant le signe des expressions affines $3x + 4$ et $7 + x$ à l'aide de la propriété n° (signe du). Ici les coefficients directeurs valent et . Ils sont tous deux ainsi chaque facteur est une fonction qui est dans un premier temps puis après s'être en sa valeur charnière.
- Pour la dernière ligne : lorsqu'on veut trouver le signe à mettre dans une case de la dernière ligne, on regarde les signes des cases au-dessus et on applique la règle des pour un produit.

Interprétation du tableau
Pour interpréter le signe de chacune des cases de la dernière ligne, on doit faire le lien avec la première ligne.

- Pour tout $x \in]-\infty\,;\,-7]$ on a $q(x)$

x	$-\infty$		-7		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$7+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-4)(7+x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Pour tout $x \in \left]-\infty\,;\,-7\right[$ on a $q(x)$
- Pour tout $x \in \left]-7\,;\,\dfrac{4}{3}\right[$ on a $q(x)$

x	$-\infty$		-7		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$7+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-4)(7+x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Pour tout $x \in \left[-7\,;\,\dfrac{4}{3}\right]$ on a $q(x)$
- Pour tout $x \in \left[\dfrac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$ on a $q(x)$

x	$-\infty$		-7		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$7+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-4)(7+x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Pour tout $x \in \left]\dfrac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$ on a $q(x)$

3 Signe d'un quotient

On étudie dans ce paragraphe le signe du quotient entre deux expressions

C'est-à-dire que l'on cherchera à établir le signe d'expressions de la forme :

La méthode sera ici quasiment identique puisque la règle des signes pour un est la même que pour un

Il faudra cependant faire attention au fait que la valeur qui annule le est une valeur

Exemple 3

On cherche ici à étudier le signe de l'expression $f(x) = \dfrac{26-2x}{3+9x}$.

On détermine dans un premier temps les valeurs de x qui annulent le numérateur est le dénominateur.

Valeur

$26-2x=0$

Valeur

$3+9x=0$

On peut alors dresser le tableau de signes de f en utilisant à nouveau la propriété n° :

Explications

- La première ligne s'obtient à partir de la recherche des valeurs et
- Les deuxièmes et troisièmes lignes s'obtiennent en étudiant le signe des expressions affines $26-2x$ et $3+9x$ à l'aide de la propriété n° (signe du). Ici les coefficients directeurs valent et . Le premier étant , la fonction affine correspondante est et les signes dans la ligne de $26-2x$ sont donc dans un premier temps puis Réciproquement, les signes dans la ligne de la fonction affine $3+9x$ sont dans un premier temps puis
- Pour la dernière ligne : lorsqu'on veut trouver le signe à mettre dans une case de la dernière ligne, on regarde les signes des cases au-dessus et on applique la règle des pour un quotient. On n'oubliera pas de mettre une double barre dans la dernière ligne au niveau de la valeur interdite.

Conclusion

- Pour tout $x \in \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{3}\right[$ on a $f(x)$
- Pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{3}\,;\,13\right[$ on a $f(x)$
- Pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{3}\,;\,13\right]$ on a $f(x)$
- Pour tout $x \in]13\,;\,+\infty[$ on a $f(x)$
- Pour tout $x \in [13\,;\,+\infty[$ on a $f(x)$