Ensembles de nombres ∼ Calcul littéral ∼ Racine carrée

Exercice 1

Déterminer le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants :

$a = \dfrac{1}{2}$ $\qquad b = \dfrac{10-4}{3}$ $\qquad c = \sqrt{5}$ $\qquad d = -\sqrt{16}$

$e = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$ $\qquad f = \dfrac{91}{7}$ $\qquad g = \sqrt{98} - \sqrt{18} - 2\sqrt{2}$ $\qquad h = \dfrac{51}{3} - \sqrt{289}$

Exercice 2

Le but de cet exercice est de démontrer que le nombre $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

1. À quels ensembles de nombres appartient $\dfrac{1}{3}$?
2. Nous allons supposer que $\dfrac{1}{3}$ est un nombre décimal et obtenir à la fin de notre raisonnement une contradiction.
   a. Comment s'appelle un tel type de raisonnement ?
   b. On suppose donc qu'il existe deux entiers naturels a et n tels que : $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$.
      Montrer alors que $10^n = 3a$.
   c. Pourquoi l'égalité $10^n = 3a$ ne peut-elle jamais être vraie ? On pourra raisonner par rapport aux tables de multiplications.
   d. Conclure.

Exercice 3

À l'aide des formules de distributivité démontrer les identités remarquables.

Exercice 4

Développer réduire et ordonner les expressions suivantes.

$f(x) = (x+1)^2$ $\qquad g(t) = (t-1)^2$

$h(x) = (x+3)(x-3)$ $\qquad i(x) = (2x - \sqrt{5})(2x + \sqrt{5})$

$j(t) = \left(\dfrac{2}{3} - t\right)(6+t)$ $\qquad k(x) = 3(2x-5)(7x+8)$

$\ell(x) = (5x+3)(x^2+2x-3)$ $\qquad m(x) = \dfrac{1}{2}x(2x-5)^2$

Exercice 5

1. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{2}$, avec $a \in \mathbb{Q}$.

   $x_1 = \sqrt{200}$ $\qquad x_2 = 3\sqrt{2} - \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

2. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{3}$, avec $a \in \mathbb{Q}$.

   $y_1 = \sqrt{12} - 8\sqrt{48}$ $\qquad y_2 = \dfrac{13}{4\sqrt{147}}$

3. L'égalité $\dfrac{3}{6-\sqrt{35}} = 18 + 3\sqrt{35}$ est-elle vraie ?
4. Montrer que $\dfrac{3}{1-\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

5. L'affirmation $\dfrac{5}{3+\frac{3}{7}} - \dfrac{2+\frac{1}{3}}{4} \in \mathbb{D}$ est-elle vraie ?

6. Écrire sous la forme d'une fraction irréductible le nombre $\dfrac{1+\frac{1}{7}}{2-\frac{1}{14}}$.

Exercice 6

Factoriser les expressions suivantes.

$f(x) = 3x + 2x^2$

$g(t) = t^2 - t$

$i(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x$

$j(t) = t^5 - t^3 + 41t$

Exercice 7

1. Construire un triangle rectangle, dont les côtés adjacents à l'angle droit mesurent 1 cm.
2. Vérifier alors que l'hypothénuse de ce triangle mesure $\sqrt{2}$.
3. Sur votre figure mesurer à la règle la longueur de l'hypothénuse, et donner alors une approximation du nombre $\sqrt{2}$.
4. Nous voyons que cette méthode n'est pas très précise. Essayons de faire mieux. Pour cela, constuire un triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit mesurent 10 cm.
5. Grâce à cette configuration trouver une valeur approchée plus précise de $\sqrt{2}$.
6. Peut-on encore améliorer la précision en poussant plus loin cette méthode ? Quelles sont ses limites ?
7. Héron d'Alexandrire, mathématicien du I$^{\text{er}}$ siècle de notre ère, a utilisé une méthode très performante pour approcher le nombre $\sqrt{2}$. En voici la description :

> *Méthode de Héron*
>
> Pour pouvoir trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$, on choisit un nombre entier entre 1 et 10. On ajoute à la moitié de ce nombre son inverse.
>
> On obtient alors un nouveau nombre à partir duquel on effectue les mêmes opérations.
>
> On réitére le procédé jusqu'à obtenir une approximation satisfaisante.

a. Déterminer la fraction obtenue par cette méthode en choisissant 2 au départ et en effectuant trois itérations.

b. Modifier l'algorithme ci-dessous pour qu'il effectue 10 itérations de la méthode de Héron.

```
n = 3.0
print(n)

for i in range(1,5):
  n = n/2
  print(n)
```

c. Donner une valeur approchée à 10^{-5} de $\sqrt{2}$.

Exercice 8

Soient a et b deux nombres réels positifs.

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = \sqrt{a}$ et $AC = \sqrt{b}$.

1. Comparer les nombres $AB + AC$ et BC.
2. Montrer que $BC = \sqrt{a+b}$.
3. Comparer alors les nombres $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b}$.