Arithmétique

Exercice 1

1. Donner la liste des diviseurs de 315.
2. Quel est le rôle de l'algorithme ci-dessous ?

```python
n = 3600
for i in range(1,3601):
    if n%i == 0:
        print(i)
```

3. Modifier l'algorithme précédent pour vérifier la réponse donnée à la question 1.
4. Déterminer deux nombres premiers supérieurs à $1\,000$ puis deux autres supérieurs à $1\,000\,000$.

Exercice 2

On considère les nombres $a = 24$ et $b = 18$.

1. Donner deux multiples de a et deux multiples de b.
2. Existe-t-il un nombre qui soit multiple de a et b et strictement inférieur à ab ?
3. Déterminer le plus petit commun multiple entre $n = 36$ et $m = 168$.
4. Écrire sous forme irréductible les nombres suivants :

$$a_1 = \frac{1}{24} + \frac{1}{18} \qquad a_2 = \frac{7}{36} + \frac{13}{168}$$

$$a_3 = \frac{2}{3} + \frac{7}{6} + \frac{1}{4} \qquad a_4 = \frac{9}{308} - \frac{5}{242}$$

Exercice 3

Dans chaque cas, donner tous les diviseurs de chacun des deux nombres, puis déterminer les diviseurs communs. Parmi ceux-là, déduire le plus grand commun diviseur aux deux nombres.

a. 15 et 35.
b. 60 et 40.
c. 45 et 64.
d. 270 et 180.
e. 56 et 99.

Exercice 4

Le crible d'Ératosthène permet de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un certain entier.
Nous allons l'utiliser ici pour déterminer les nombres premiers inférieur à 100.
Dans le tableau ci-dessous, barrer tous les multiples de 2 sauf 2. Entourer ensuite le premier nombre non barré après 2, et barrer tous les multiples de ce nombres (sauf celui-ci) et répéter les opérations jusqu'à ne plus pouvoir rien barrer ou entourer.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Exercice 5

Écrire les fractions ci-dessous sous forme irréductible.

a. $\dfrac{45}{20}$.

b. $\dfrac{63}{42}$.

c. $\dfrac{121}{56}$.

d. $\dfrac{156}{234}$.

e. $\dfrac{1080}{1350}$.

Exercice 6

Soient a et a' deux nombres impairs. Montrer que $a^2 + a'^2$ est un nombre pair.

Exercice 7

1. Dans un club de vacances, un concours de danse par équipes regroupe 60 hommes et 80 femmes.
   L'organisme veut constituer le plus d'équipes possibles, chacune de même nombre et contenant la même proportion d'hommes et de femmes.
   Combien d'équipes l'organisme doit-il constituer ?
2. On dispose de 60 dalles de jardin de 50 cm par 50 cm.
   a. Combien de terrasses rectangulaires différentes peut-on faire en utilisant la totalité de ces 60 dalles.
   b. Parmi ces terrasses qu'elle est celle dont l'aire est maximale ?

Exercice 8

Soit n un entier naturel qui possède deux diviseurs stricts que l'on note a et b.
C'est-à-dire que : $n = a \times b$ et $1 < a < n$ ainsi que $1 < b < n$.
L'objectif de l'exercice est de démontrer par l'absurde que $a \leq \sqrt{n}$ et $b \leq \sqrt{n}$.

1. Quelles hypothèses émettre pour débuter le raisonnement par l'absurde ?
2. Montrer, sous ces hypothèses, que $n < b\sqrt{n}$ et $b\sqrt{n} < ab$.
3. En déduire une contradiction et conclure.
4. À partir du résultat précédent optimiser l'algorithme ci-dessous.

```python
from math import*

def isPrime(n):
    borne = n
    premier = True
    for i in range(2,borne):
        if n%i == 0:
            premier = False
    if premier:
        print(str(n)+" est premier.")
    else:
        print(str(n)+" n'est pas premier.")
```

5. Leonhard Euler (1707 / 1783) a découvert que les formules $p(n) = n^2 + n + 17$ et $q(n) = n^2 - n + 41$ fournissaient, de manière très fréquente, des nombres premiers pour les premières valeurs de n.
   En utilisant la fonction donnée (et en l'optimisant) écrire un algorithme qui donne le pourcentage de nombres premiers obtenu à l'aide de chacune de ces formules pour n allant de 0 jusqu'à 100.

```python
from math import*

def isPrime(n):
    borne = n
    premier = True
    for i in range(2,borne):
        if n%i ==0:
            premier = False
    return premier
```

Exercice 9

Le but de cet exercice est de montrer que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une fraction irréductible $\dfrac{a}{b}$, avec a et b des entiers, $b \neq 0$, tel que :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

1. Montrer que $a^2 = 2b^2$.
2. En déduire que a est pair.
3. Montrer alors que b^2 est pair. Que peut-on en déduire pour b ?
4. Conclure.

Exercice 10

La conjecture de Goldbach affirme que « tout nombre pair supérieur ou égale à 4 est la somme de deux nombres premiers ».

1. Vérifier cette conjecture pour tous les nombres pairs de l'intervalle $[10;20]$.
2. Trouver tous les nombres premiers p et p' tels que $10 = p + p'$.
3. De combien de façons 50 peut-il se décomposer en une somme de deux entiers naturels ? Qu'elle est la proportion de ces décompositions répondant à la conjecture de Goldbach ?
4. De combien de façons un entier naturel pair $2n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) peut-il se décomposer en une somme de deux entiers naturels ?
   Certains mathématiciens estiment que la proportion de ces décompositions qui répondent à la conjecture de Goldbach est proche de $\dfrac{n}{(\ln(n))^2}$ pour n assez grand, avec $\ln$ une fonction qui est sur une des touches de la calculatrice.
   La conjecture de Goldbach a été vérifiée pour tous les entiers naturels pairs de 4 jusqu'à (au moins) $1,1 \times 10^{18}$.
   En utilisant votre calculatrice expliquer pourquoi certains mathématiciens estiment fort probable que la conjecture de Goldbach est vraie.