Généralités sur les fonctions

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x - 5$.

1. Déterminer les images par f de : -3; $\frac{5}{2}$; a; $a+2$; $x+1$.
2. Déterminer les éventuels antécédents de : 0; $\frac{3}{4}$; $\sqrt{5}$; y.

Exercice 2

Pour chaque fonction trouver la ligne du tableau correspondante.

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = x$
3. $h(x) = x^3$
4. $i(x) = \sqrt{x^2}$
5. $j(x) = \dfrac{x^2}{x}$
6. $k(x) = (\sqrt{x})^2$

x	-1	0	1	2
?	-1	0	1	8
?	1	0	1	2
?	-1	0	1	2
?	non définie	0	1	2
?	-1	non définie	1	2
?	1	0	1	4

Exercice 3

On considère la fonction suivante, définie pour tout nombre réel différent de 3 par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\backslash\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{t^2+1}{t-3} \end{array}$$

1. Expliquer pourquoi le nombre 3 ne peut pas faire partie de l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'image de 0 par f.
3. Montrer que $-\frac{1}{3}$ a pour image lui-même.
4. D'autres éléments de l'ensemble de définition ont-ils pour image pour eux-même ?

Exercice 4

Une fourmi lancée à grande vitesse effectue un freinage. On s'intéresse à la distance qu'elle parcourt en fonction du temps.

- On se dit qu'au temps $t = 0$, elle a parcouru 0 cm.
- Au bout de 1 seconde, elle a parcouru 1 cm.
- Au bout de 2 secondes, elle a parcouru, en centimètres, $1 + \frac{1}{2}$.
- Au bout de 3 secondes, elle a parcouru $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ cm.
- Au bout de 4 secondes, elle a parcouru, on s'en doute, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ cm.
- Et ainsi de suite.

Ainsi, on peut définir une fonction d, telle qu'à l'instant t, exprimé en seconde, la fourmi aura parcourue la distance $d(t)$, exprimée en centimètre.

1. Écrire sous forme décimale, à l'aide de deux chiffres après la virgule, la distance parcourue par la fourmi au bout de 2 secondes.
2. Calculer ensuite, $d(3)$, $d(4)$ et $d(5)$. Que représentent ces nombres ?
3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$d(t)$															

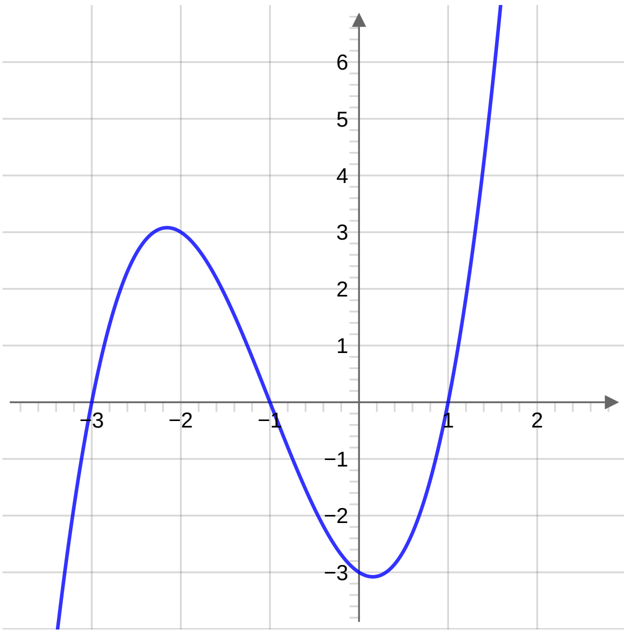
4. Construire dans un repère orthonormé le nuage de points associés à ce tableau de valeurs. Pourquoi n'est-il pas réaliste de relier les points par un segment ?
5. Au bout de combien de temps la fourmi aura-t-elle dépassé les 3 cm ? Les 3,5 cm ?
6. Expliquer le rôle de l'algorithme suivant.

```
d = 0.0
n = 1.0

while d < 15:
    d = d + 1/n
    n = n + 1

print(n)
```

7. La fourmi va-t-elle s'arréter ?

Exercice 5

On considère la fonction : $f : x \longmapsto x^3 + 3x^2 - x - 3$.
On donne sa représentation graphique dans un repère orthogonal.



Répondre de la manière la plus précise possible aux questions suivantes.

1. Quelle est l'image de $-1,5$ par la fonction f?
2. Quelle est l'image de 0 par la fonction f?
3. Quelle est l'image de 1 par la fonction f?
4. Trouver les antécédents de 2.
5. Trouver les antécédents de 5.
6. Trouver l'abscisse des points de la courbe d'ordonnée 0.
7. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
8. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -2$.
9. Donner le tableau de signes de la fonction f.

10. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.
11. Quelles sont les valeurs maximales et minimales de cette fonction ?

Exercice 6

On donne trois fonctions définies soit par leur courbe, soit par leur expression algébrique, soit par leur tableau de valeurs. Attention ces trois fonctions ne sont pas les mêmes !

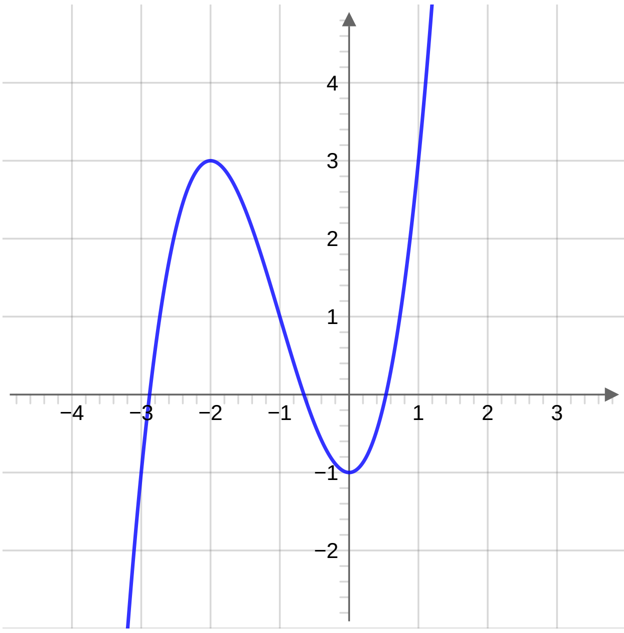
• Soit f une fonction dont on connait le tableau de valeur suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	$2,1$	0	-1	$-1,333$	-0.5	$0,001$	2	10

•Soit g la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1. \end{array}$$

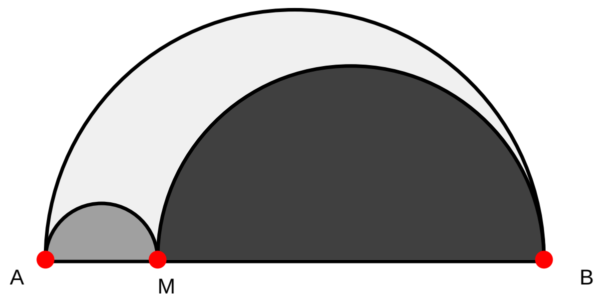
•Soit h la fonction dont on connait graphique suivant :



1. Pour chacune de ces fonctions trouver l'image de $-1,5$, puis de 4.
2. Trouver ensuite pour chacune d'elles les antécédents de 2, puis de $-1,5$.
3. Trouver le maximum de ces fonctions.
4. Etablir enfin les tableaux de variations de f, g et h.
5. Conclure sur les avantages et les inconvénients de chacune des représentations des fonctions.

Exercice 7

On considère la figure suivante, où le point M se déplace sur le segment $[AB]$. On sait de plus que $AB = 9$ et on pose $AM = x$.



On cherche à déterminer quand est-ce que l'aire de la partie colorié en clair et maximale.

1. Émettre une conjecture par rapport à notre problème.
2. Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?
3. Déterminer l'aire de chacun des trois demi-disques de la figure.
4. En déduire l'aire de la partie hachurée en fonction de x. On notera celle-ci $A(x)$.
5. Tracer dans le repère fourni en annexe, la courbe représentative de la fonction A.
6. Trouver graphiquement la réponse à notre problème.
7. Construire le tableau de variations de la fonction A sur son ensemble de définition.
8. Interpréter ce tableau de variations en termes d'évolution de l'aire de la partie hachurée.
9. Démontrer que : $A(x) = \dfrac{\pi}{4}(20,25 - (x-4,5)^2)$.
10. En déduire la valeur exacte de x pour que $A(x)$ soit maximale.