Étude de fonctions

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes.

a. $x^2 = 25$
b. $x^2 = -1$
c. $x^3 = -8$
d. $\frac{1}{x} = 0,1$
e. $\sqrt{x} = 6$
f. $x^2 = 3$
g. $\frac{1}{x} = \frac{3}{8}$
h. $\sqrt{x} = -2$
i. $x^3 = -1$

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes.

a. $x^2 \leq 4$
b. $x^2 < 9$
c. $x^2 \leq -1$
d. $x^2 \geq 3$
e. Pour $x > 0$, $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$
f. Pour $x > 0$, $\frac{1}{x} \geq 3$

Exercice 3

Sans utiliser la calculatrice compléter les pointillés par $<$, $>$ ou $=$.

a. $3^2 \dots 4^2$
b. $(-2)^2 \dots (-2,1)^2$
c. $\sqrt{13} \dots \sqrt{12,8}$
d. $\sqrt{\frac{13}{7}} \dots \sqrt{\frac{11}{7}}$
e. $2\sqrt{10} \dots 7$
f. $\frac{7}{19} \dots \frac{5}{19}$
g. $\frac{1}{\pi} \dots \frac{1}{\pi - 1}$
h. $-\frac{1}{3} \dots -\frac{1}{4}$
i. $3^3 \dots 5^3$
j. $(-141)^3 \dots (-143)^3$

Exercice 4

1. Soit x un nombre réel tel que $-2 \leq x \leq 3$. Montrer que : $0 \leq x^2 \leq 9$.
2. Soit t un nombre réel tel que $3 \leq t \leq 5$. Déterminer un encadrement le plus précis possible pour $\frac{1}{t}$.
3. Soit y un nombre réel tel que $-4 \leq y \leq 2$. Déterminer un encadrement le plus précis possible pour y^3.

Exercice 5

Pour tout réel x positif on définit les fonctions f, g, h et i par :

- $f(x) = x$,
- $g(x) = x^2$,
- $h(x) = x^3$.

On note $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$, et $\mathcal{C}_h$ leur courbe représentative respective dans un repère du plan.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $h(x) - g(x) = x^2(x-1)$.
2. Quel est le signe de x^2 ?
3. Si $x \in [0; 1]$, déterminer la position relative de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$.
4. Même question pour $x \geq 1$.
5. Factoriser l'expression $g(x) - f(x)$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a \leq b$.

1. Montrer que $f(b) - f(a) = \dfrac{a-b}{ab}$.
2. En déduire le signe de $f(b) - f(a)$ et que $f(b) \leq f(a)$.
3. Que venons-nous de démontrer pour la fonction f sur $]0; +\infty[$?

Exercice 7

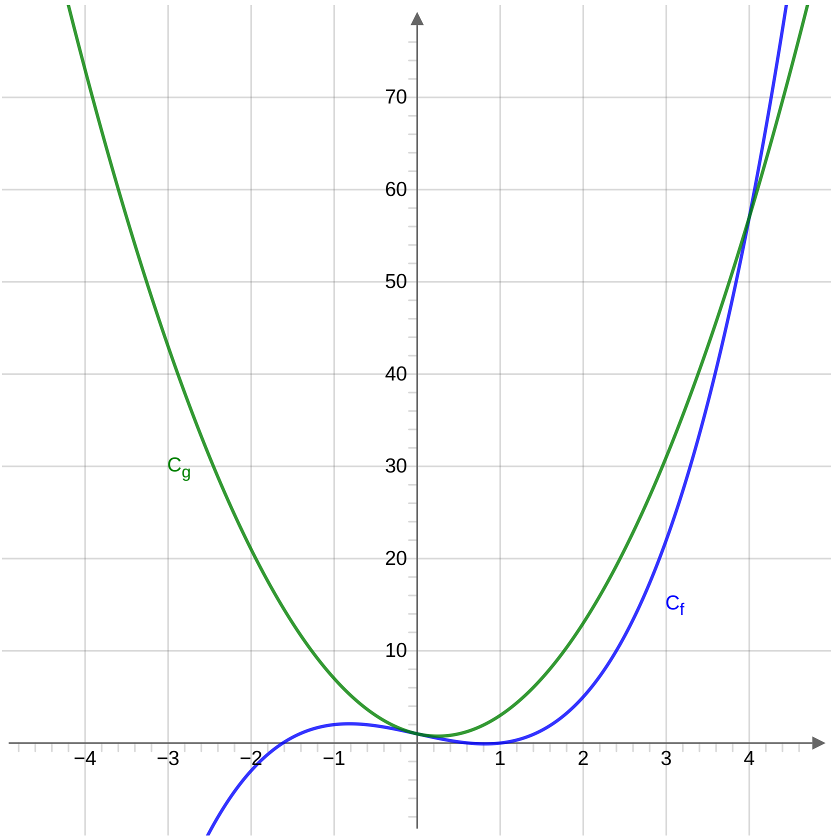
Dans chacun des cas étudier la parité de la fonction f définie sur I.

1. $f(x) = x^4, \;\; I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^4, \;\; I = [-2; 1]$.
3. $f(x) = x^3 - 5x, \;\; [-10; 10]$.
4. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}, \;\; I = \mathbb{R}$.

Exercice 8

Partie A

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On donne leur représentation graphique dans le repère ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersections entre les deux courbes.
2. Déterminer graphiquement leur position relative.

Partie B

Pour tout réel x nous avons que $f(x) = x^3 - 2x + 1$ et $g(x) = 4x^2 - 2x + 1$.

1. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersections entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. Déterminer par le calcul leur position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 4$. On considère de plus la fonction affine g constante égale à 4.
Déterminer la position relative des courbes de ces deux fonctions dans un repère du plan :

1. Conjecturer la position relative des courbes de ces deux fonctions à l'aide de la calculatrice.
2. Démontrer cette conjecture par le calcul.