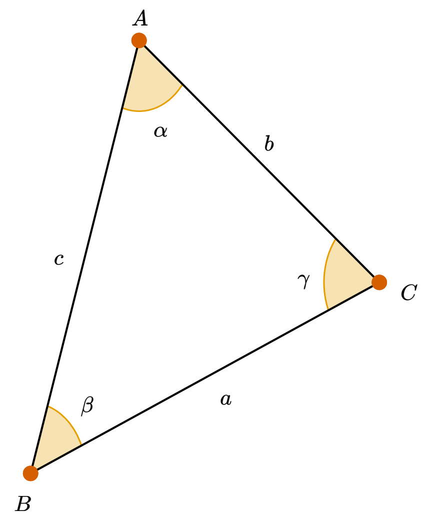
2nde ~ Devoir maison
Sortie scolaire au Musée des Arts et Métiers

Ce document regroupe quatre devoirs maisons différents qui permettront de préparer la sortie scolaire du 24/01/2025.

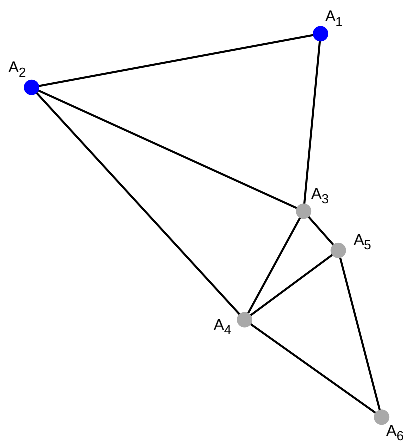
1 Triangulation

Dans la figure ci-dessous, les angles α, β et γ du triangle ABC sont aigus. On note $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.



1. Construire le point H, projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
2. Dans le triangle AHC, donner l'expression de $\sin(\alpha)$ en fonction de CH et b.
   Dans le triangle BHC, donner l'expression de $\sin(\beta)$ en fonction de CH et a.
3. En déduire que $\dfrac{\sin(\alpha)}{a} = \dfrac{\sin(\beta)}{b}$ et que $a = \dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \times b$.

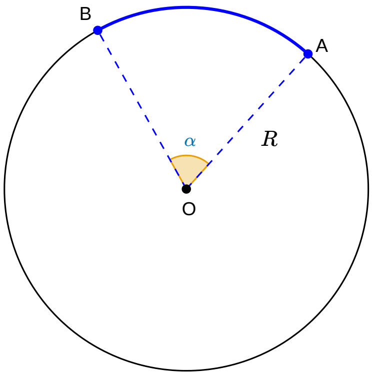
   On admettra dans la suite de l'exercice la formule complète (dite loi des sinus) : $\dfrac{\sin(\alpha)}{a} = \dfrac{\sin(\beta)}{b} = \dfrac{\sin(\gamma)}{c}$.
4. Dans la figure ci-dessous on a :
   - $A_1A_2 = 30$ km,
   - $\widehat{A_2A_1A_3} = 74°$, $\widehat{A_1A_2A_3} = 35°$,
   - $\widehat{A_3A_2A_4} = 23°$, $\widehat{A_2A_3A_4} = 86°$,
   - $\widehat{A_4A_3A_5} = 70°$, $\widehat{A_3A_4A_5} = 25°$,
   - $\widehat{A_4A_5A_6} = 68°$, $\widehat{A_5A_4A_6} = 72°$.



   Déterminer la longueur A_5A_6.

2 Aplatissement

On considère une cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $R > 0$, ainsi que deux points A et B de $\mathscr{C}$.



Si l'angle $\alpha = \widehat{AOB}$ est exprimé en degrés, alors la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ est donnée par :

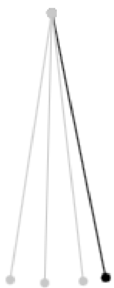
$$\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi\alpha}{180}R.$$

1. À l'aide de cette formule, déterminer la longueur d'un demi-cercle de rayon 1.
2. Justifier $R = \dfrac{180}{\pi\alpha}\overset{\frown}{AB}$.
3. On imagine dans cette question que la Terre a une forme sphèrique. L'objectif est, en reprenant des mesures de longueur qui ont été faites à la surface de la Terre, de trouver la valeur du rayon terrestre.

   Entre 1668 et 1670 Jean Picard, dit l'abbé Picard (1620 - 1682), va effectuer des mesures géodésiques entre Juvisy et Sourdon. Il détermine qu'entre ces deux points et le centre de la Terre l'angle est de $1^\circ 11' 57''$ (ce qui se lit 1 degrés, 11 minutes et 57 secondes). La longueur de l'arc de cercle (déterminée par triangulation en utilisant la loi des sinus) est de $68\,430$ toises du Châtelet et 3 pieds.

   a. Expliquer pourquoi un angle de $1^\circ 11' 57''$ mesure à 10^{-3} près $1,199^\circ$.
   b. Sachant qu'à la fin du XVII° siècle une toise du Châtelet correspondait à $1,949$ mètres et un pied à $32,484$ cm, donner la longueur de l'arc de cercle déterminé par Picard en kilomètres.
   c. À partir des résultats précédents, déterminer une valeur approchée du rayon terrestre en kilomètres.
   d. Lors de l'expédition au Pérou dirigée par Charles Marie de La Condamine entre 1735 et 1745, les scientifiques mesurent un arc de méridien de $3^\circ 7' 1''$ sur une distance de $176\,950$ toises du Châtelet.
   Ces mesures ont été faites au niveau de l'équateur à proximité de la ville de Quito.
   Déterminer, en kilomètres, le rayon terrestre correspondant à ces mesures.
   e. En admettant que les résultats de Picard et de La Condamine ont une marge d'erreur de la centaine de kilomètres que peut-on en déduire sur la forme de la Terre ?

3 Le pendule



Un **pendule simple** est un objet suspendu à une corde ou une tige qui oscille sous l'effet de la gravité. Il est composé d'une masse appelée boule (représentée par une petite boule sur le schéma) accrochée à une corde qui ne s'étire pas. Quand on écarte légèrement la boule de sa position d'équilibre et qu'on la lâche, elle se met à osciller de part et d'autre sous l'effet de son poids.

La durée d'une oscillation complète (un aller-retour) est appelée la **période** du pendule. C'est un nombre réel positif que l'on note T. La valeur de T, exprimée en secondes, dépend de deux éléments :

- la longueur, en mètres, du fil que l'on note ℓ,
- la gravité, que l'on note g, et qui vaut à 45° de lattitude à peu près $9,81$ m/s^2 (il ne sera pas nécessaire de comprendre cette unité pour la suite de ce devoir).

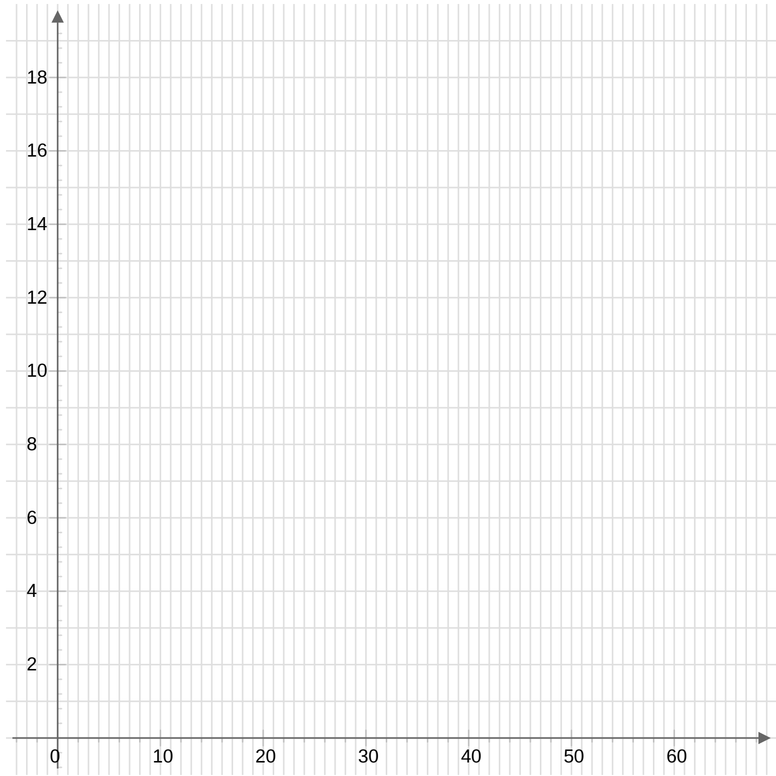
La formule qui permet de calculer la période T du pendule est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

ℓ en mètres	$0,5$	1	2	5	11	30	67
T en secondes							

2. En considèrant que T est fonction de ℓ, construire la courbe représentative de la fonction T dans le repère ci-dessous. La variable ℓ est représentée en abscisse et T en ordonnées.



3. Dans les années 1670, Jean Richer (1630 - 1696) effectue un voyage scientifique à Cayenne. Il va s'intéresser, entre autres choses, au pendule qui « bat la seconde », c'est-à-dire au pendule qui a pour période $T = 2$ secondes.
   Richer rapporte dans son journal une découverte qui le rendra célèbre et qui sera le point de départ de la controverse sur la forme de la Terre :

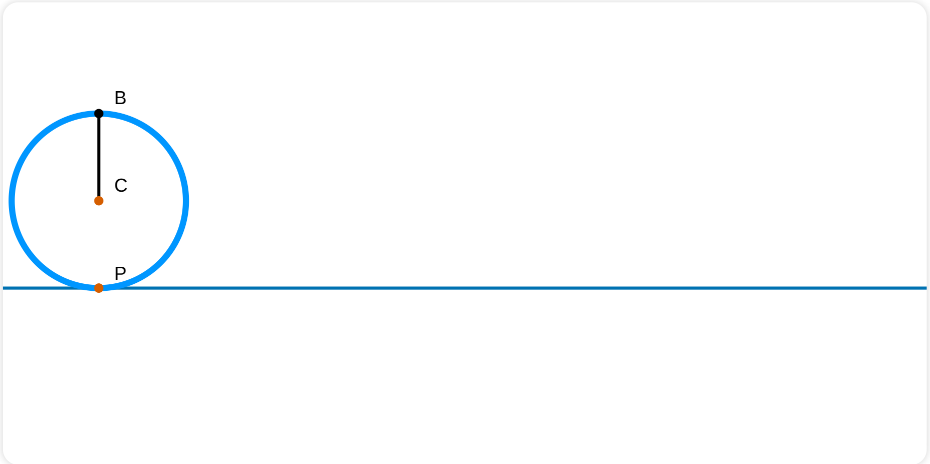
   « L'une des plus considérables observations que j'ai faite est celle de la longueur du pendule à seconde de temps, laquelle s'est trouvée plus courte à Cayenne qu'à Paris; car la même mesure qui avait été marquée en ce lieu là sur une verge de fer, suivant la longueur qui s'est trouvée nécessaire pour faire un pendule à seconde de temps ayant été apporté en France, et comparé à celle de Paris, la différence a été trouvée d'une ligne et un quart, dont celle de Cayenne est moindre que celle de Paris. »

   Expliquer, à l'aide de la formule du pendule, pourquoi la découverte de Richer permet de montrer que la gravité g est plus faible à Cayenne qu'à Paris.

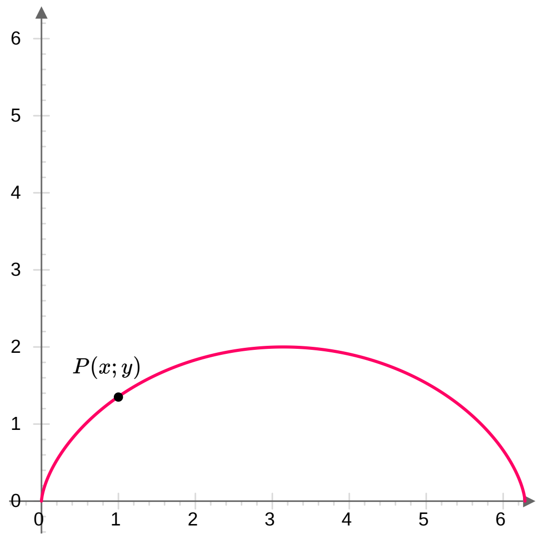
4. Montrer que $\ell = \dfrac{gT^2}{4\pi^2}$.
5. Expliquer pourquoi, lors de la Révolution française, la commission en charge de la définition du mètre a hésité à le définir comme « la longueur du pendule battant la seconde à la lattitude de 45° ».

4 La cycloïde

Une **cycloïde** est une courbe tracée par un point situé sur le bord d'une roue qui roule sans glisser sur une surface plane. La roue avance ainsi seulement grâce à sa propre rotation et la courbe décrite par le point P de la roue se visualise dans l'animation ci-dessous :

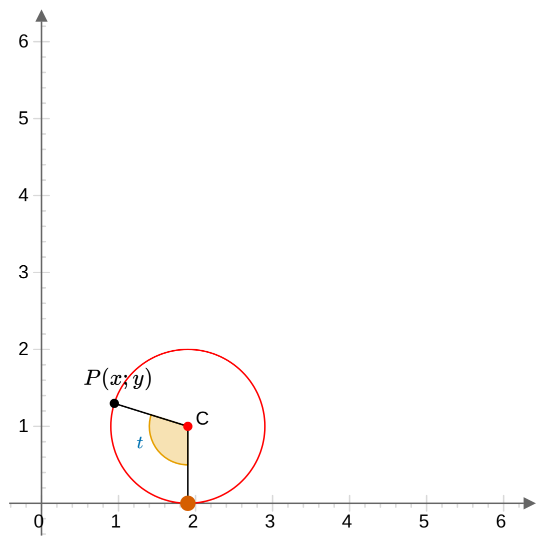


On souhaite, dans un repère du plan, trouver un procéder pour construire la cycloïde engendrée par une roue de rayon 1 et passant par l'origine comme ci-dessous :



Pour tout point $P(x\,;y)$ de la cycloïde il n'existe pas de formule directe qui donne y en fonction de x. On ne peut donc pas tracer cette courbe comme celle d'une fonction.

Dans le schéma ci-dessous, on note t l'angle dont la roue a tourné depuis son point de départ. C'est l'angle entre le point de contact de la roue avec le sol, le centre C de la roue et le point P.



Puisque les coordonnées du point P se modifient dès que t change (et donc que la roue tourne), on les note $x(t)$ et $y(t)$.
Lorsque l'angle t est exprimé en degrés on a alors :

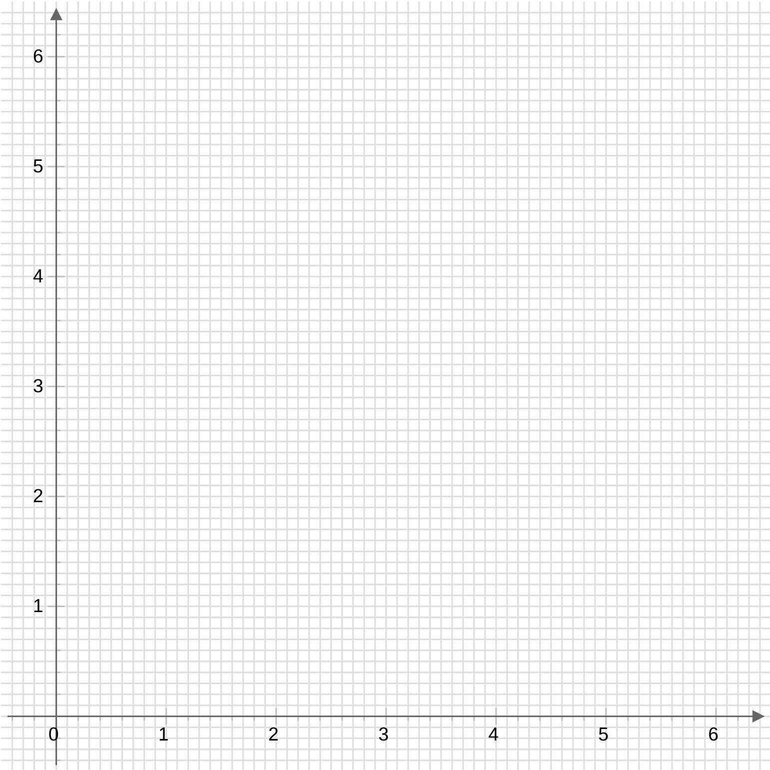
$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dfrac{\pi t}{180} - \sin(t) \\ y(t) & = & 1 - \cos(t). \end{array}\right.$$

Ainsi, en donnant plusieurs valeurs à t on trouve des valeurs pour $x(t)$ et $y(t)$, ce qui nous donne à chaque fois les coordonnées d'un point de la cycloïde.

1. À l'aide de votre calculatrice compléter le tableau ci-dessous. Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

t en degrés	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
$x(t)$													
$y(t)$													

2. Construire dans le repère ci-dessous la cycloïde associée aux valeurs précédentes.



3. Expliquer les caractères brachistochrones et isochrones de la cycloïde ainsi que leur utilisation dans le pendule cycloïdale.