Ensembles de nombres ∼ Calcul littéral ∼ Racine carrée

1 - Ensembles de nombres

Définition 1
L'ensemble des est l'ensemble, noté des entiers

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

$$10 + x = 24 \qquad\qquad 23 + x = 20$$

La première équation admet comme solution dans

Par contre, la deuxième équation devrait admettre comme solution le nombre mais celui-ci n'est pas un Donc cette équation solution dans

Définition 2
L'ensemble des est l'ensemble, noté des entiers et des

Exemple 1

Le nombre $(-4) \times 7 + (-6) \times (-6)$ est un

Propriété 1
Nous avons la relation d'inclusion suivante :

Exercice 2

Soit f la fonction définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ est pair :} & f(n) = \dfrac{n}{2} \\ \text{Si } n \text{ est impair :} & f(n) = -\dfrac{n+1}{2} \end{cases}$$

1. Calculer $f(122)$.

   $f(122) =$

2. Calculer $f(31)$.

   $f(31) =$

3. Déterminer n tel que $f(n) = 55$.

   L'image est ici donc la formule correspondant à $f(n)$ est

4. Déterminer n tel que $f(n) = -18$.

   L'image est ici donc la formule correspondant à $f(n)$ est

Définition 3
L'ensemble des nombres est l'ensemble, noté des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme où et en étant

Exemple 2

Le nombre $\dfrac{1}{7}$ est un

Le nombre -5

Le nombre $-17,481$

Propriété 2
Nous avons la relation d'inclusion suivante :

Remarque 1

Tout nombre rationnel a une écriture décimale soit finie, soit infinie et périodique. Par exemple le nombre $\dfrac{23}{7}$ a pour premières décimales :

Exemple 3

Le nombre π On dit qu'il est

Exercice 3

À partir de quelle décimale les nombres π et $\dfrac{355}{113}$ diffèrent-ils ?

À partir de

Remarque 2

Un **poème** pour apprendre les premières décimales de π, et sur ce **lien** quelques décimales de plus de π.

Définition 4
L'ensemble des nombres est l'ensemble, noté des nombres de la forme avec

Exemple 4

$2,1 =$

$-13,48 =$

$13 =$

Remarque 3

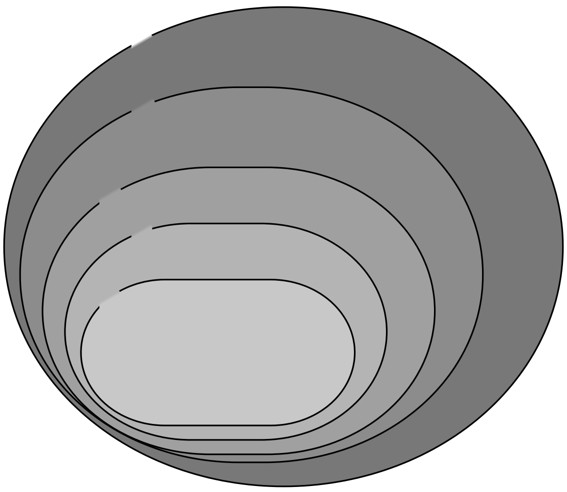
Les nombres décimaux sont des nombres ainsi :

Définition 5
L'ensemble des nombres est l'ensemble, noté composé de tous les auxquels on ajoute

Exemple 5

Tous les nombres rencontrés jusqu'à aujourd'hui sont réels :

Propriété 3
Nous avons les inclusions suivantes :



Exercice 4

Montrer que $\dfrac{\pi}{2}$ est irrationnel.

Raisonnons par : supposons que $\dfrac{\pi}{2}$ est un nombre c'est-à-dire, supposons qu'il existe

On a alors: que $\pi =$ et donc que

Or, puisque a est un $2a$ Ainsi π est un ce qui est

Notre supposition initiale, à savoir que $\dfrac{\pi}{2}$ est est donc et on peut affirmer que

2 - Calcul littéral

2.1 - Distributivité

Propriété 4
Soient a, b, c et d des nombres

-
-

Exemple 6

$\frac{2}{3}(5-6x) =$

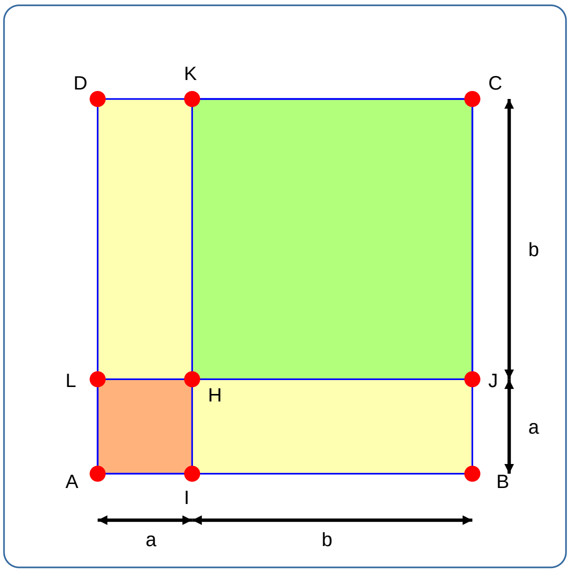
$(3x-4)(8-5x) =$

Exercice 5

Factoriser l'expression $f(x) = x^2 - x$.

2.2 - Identités remarquables

Exercice 6



Dans la figure ci-dessus a et b sont deux nombres réels positifs, ABCD est un carré, ainsi que AIHL et HJCK.

1. Déterminer l'aire du carré AIHL, puis celle du carré HJCK.

   La longueur des côtés du carré AIHL est Ainsi l'aire de ce carré est

   De même, puisque la longueur des côtés de HJCK est l'aire de ce carré est

2. Déterminer l'aire des rectangles LHKD et IBJH.

   Le rectangle LHKD a pour largeur et Ainsi son aire vaut

   Il en est pour le rectangle IBJH.

3. En exprimant, toujours en fonction de a et de b l'aire du carré ABCD. En déduire une formule pour $(a+b)^2$.

   Le carré ABCD a pour côté Ainsi son aire est de

   Par ailleurs, ce carré peut-être en plusieurs rectangles et carrés. Ainsi l'aire vaut également :

   $\mathcal{A}_{ABCD} =$

   C'est-à-dire :

Ce qui donne :

Propriété 5
Pour tous nombres a et b, on a :

-
-
-

Exemple 7

$(x+3)^2 =$

$(x-5)^2 =$

$(2x-1)(2x+1) =$

Exercice 7

Développer l'expression : $A(x) = (3x-5)^2$.

3 - Racine carrée

3.1 - Rappels algébriques

Propriété 6
Soient n et m deux a et b deux

-
-
-
-
-
-
-

Exemple 8

$\dfrac{1}{1000} =$

$x^5 \times x^2 =$

$(4x)^3 =$

$\dfrac{x^8}{x^3} = x^5$.

$\left(\frac{11}{7x}\right)^2$

$(x^3)^4 =$

3.2 - Racine carrée

Exercice 8

Déterminer un entier naturel tel qu'élevé au carré on obtienne 49.

La réponse est le nombre

On peut écrire également que

Définition 6

Soit a un nombre

Exemple 9

n	n^2
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	

n	$\sqrt{n}$
0	
1	
4	
9	
16	
25	
36	
49	
64	
81	
100	
121	
144	
169	
196	
225	
256	

Remarque 4

Nous avons que : et on peut remarquer que ainsi que

Sur ce cas particulier nous avons :

La question qui se pose alors est de savoir si ce cas particulier se à tout de réels positifs.

Propriété 7
Soient a et b deux nombres

Remarque 5

On peut alors dire que :

Preuve
Soient a et b deux nombres On a alors, par de la racine carrée :

D'autre part :

Ainsi, les deux nombres positifs ont leur carré qui sont On peut alors affirmer qu'il sont eux-même et écrire :

Exemple 10

$\sqrt{8} =$

Exercice 9

Écrire sous la forme $a\sqrt{3}$, $a \in \mathbb{N}$, le nombre $2\sqrt{48}$.

Propriété 8
Soient a et b deux nombres

Remarque 6

On peut alors dire que :

Exercice 10

Le nombre $\sqrt{\frac{2}{4}} - \frac{\sqrt{18}}{6}$ est-il un nombre entier ?