

2nde ~ Devoir maison n°7

Optimisation

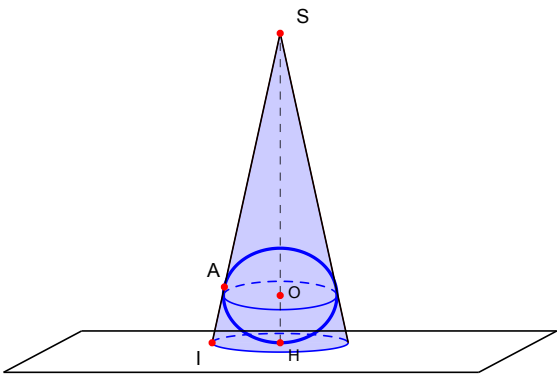
Le but de ce devoir est, dans une situation géométrique donnée, de calculer un volume en fonction d'un paramètre x . À l'aide d'un graphique nous pourrons alors conjecturer la valeur minimale de ce volume qui dépend de x .

Description de la situation

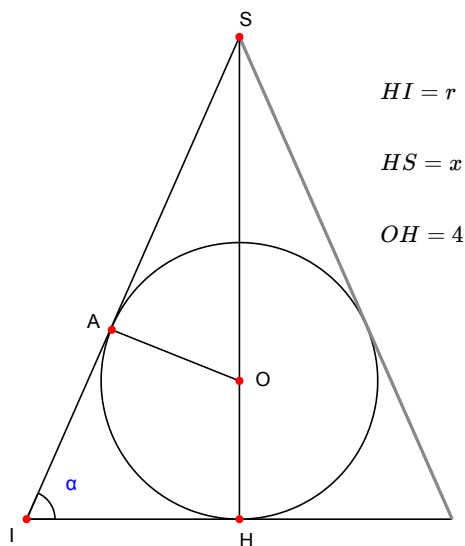
Une sphère de rayon 4 est placée sur un plan horizontal \mathcal{P} . Le point de contact entre le plan et la sphère est noté H . Sur la perpendiculaire au plan passant par H on place un point S au delà du "pôle nord" de la sphère. (donc $SH > 8$) On trace un cône de sommet S , et de disque de base reposant sur \mathcal{P} , de telle sorte que ce cône soit tangent à la sphère. On note $HS = x$, avec $x > 8$, et $HI = r$, avec r à déterminer, mais qui se modifie lorsque x change.

Pour les trois premières questions on déplacera le point S dans la figure présente sur le site.

1. Lorsque le point S monte que fait le point I ? Lorsque x augmente que fait donc le nombre r ?
2. Lorsque le point S se rapproche du pôle nord de la sphère que fait le point I ? Que font x et r dans cette situation ?
3. Expliquer pourquoi le volume du cône dépend de la valeur de x .



On cherche maintenant à déterminer la valeur minimale du volume V du cône. Pour cela nous allons tout d'abord raisonner dans la figure suivante, qui est une coupe de la figure précédente.



4. Pour la question suivante, on pourra s'aider de recherches sur les cercles et les droites.

- a. En combien de points la droite (IS) coupe-t-elle le cercle de centre O et de rayon 4 ?
- b. Que représente donc la droite (IS) pour ce cercle ?
- c. Que peut-on dire des droites (IS) et (OA) ? On justifiera la réponse en utilisant une propriété.
- d. Quelle est donc la nature du triangle AOS ?

5. Montrer alors que $AS^2 = x^2 - 8x$.

6. Montrer que $\widehat{AOS} = \alpha$

7. En exprimant $\tan(\alpha)$ de deux manières différentes montrer que : $\frac{x}{r} = \frac{AS}{4}$.

8. En déduire que : $r^2 = \frac{16x}{x-8}$.

9. Montrer alors que le volume V du cône est donné par la formule : $V(x) = \frac{16\pi}{3} \frac{x^2}{x-8}$.

10. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivants :

x	8,1	8,2	8,5	9	10	11	12	13	14
$V(x)$									

11. À l'aide de ce tableau de valeurs, tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative du volume V . On fera attention à bien adapter les unités.

12. À l'aide de la courbe précédente trouver à quelle hauteur nous devons placer S pour que le volume du cône soit minimal.

13. Quel est alors le volume du cône ?

Pour faire ce devoir maison vous aurez besoin de :

- La formule de l'aire d'un disque.
- Celle du volume d'un cône.
- De la définition et d'une propriété sur la tangente à un cercle.
- Que la somme des mesures des angles d'un triangle fait ...
- Des formules de trigonométries.
- Des identités remarquables.
- De la manière dont on a tracé les courbes en classe.