Probabilités

Exercice 1

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. On admet qu'il y a équiprobabilité des tirages. Les événements A et B sont définis comme suit :
A : "La carte est un pique".
B : "La carte est une figure"(valet, dame ou roi).

1. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
2. On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A. Définir $\overline{A}$ par une phrase. Calculer alors $P(\overline{A})$.
3. Définir par une phrase l'événement $A \cap B$, puis calculer $P(A \cap B)$.
4. Les événements A et B sont-ils dijoints ?
5. Définir par une phrase l'événement $A \cup B$.
6. Calculer $P(A \cup B)$.
7. Trouver un événement C tel que B et C soient disjoints.
8. Calculer $P(B \cup C)$.

Exercice 2

Un sac contient dix boules indiscernables au touché. Il y a cinq boules blanches, numérotées de 1 jusqu'à 5, trois boules noires, numérotées de 1 jusqu'à 3, et deux boules jaunes, numérotées 1 et 2.
On choisit une boule hasard. Toutes les boules ont la même probabilité d'être choisies. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

1. A : "La boule est blanche".
2. B : "La boule porte le numéro 3".
3. C : "La boule porte un numéro impair".
4. $A \cap C$.
5. $A \cup C$.
6. D : "La boule ne porte pas le numéro 5".

Exercice 3

Voici un tableau concernant le moyen de transport utilisé par les employés d'une usine pour se rendre à leur lieu de travail situé dans une ville de province.

	Voiture	Autobus	Autre	Total
En ville		34		77
En banlieu	56			82
Total		52	28	159

1. Compléter le tableau.
2. On rencontre au hasard un employé de cette usine. Quelle est la probabilité que cet employé :
   a. habite en ville ?
   b. habite en ville et aille en voiture au travail ?
   c. ne vienne pas en autobus au travail ?
3. On rencontre au hasard un employé habitant en ville. Quelle est la probabilité qu'il aille à son travail en voiture ? Comparer ce résultat avec celui de la question 1.b.
   Expliquer alors pourquoi on peut dire qu'il y a changement d'ensemble de référence.
4. On rencontre au hasard un employé qui va à son travail en voiture. Quelle est la probabilité qu'il habite en banlieu ?

Exercice 4

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie usuelle présentant deux côté : pile ou face.
On obtient ainsi une suite ordonnée de trois résultats.

1. Construire un arbre illustrant cette l'expérience.
2. Écrire l'univers de cette expérience.
3. Calculer la probabilité de l'événement A: "les trois résultats sont identiques."
4. Calculer la probabilité de l'événement B: "la suite des trois résultats commence par pile."
5. Calculer la probabilité de l'événement "A et B". En déduire celle de l'événement "A ou B".

Exercice 5

On lance une pièce de monnaie équilibrée 400 fois à la suite.

1. Quelle fréquence de piles peut-on espérer obtenir après ces 400 lancers ?
2. Le programme Python ci-dessous permet d'afficher la fréquence de piles obtenus après simulation de 400 lancers de pièces. Expliquer chacune des ses instructions.

```
from random import*

s = 0
n = 400

for i in range(0,n):
  p = randint(0,1)
  if p == 0:
    s = s + 1

print(s/n)
```

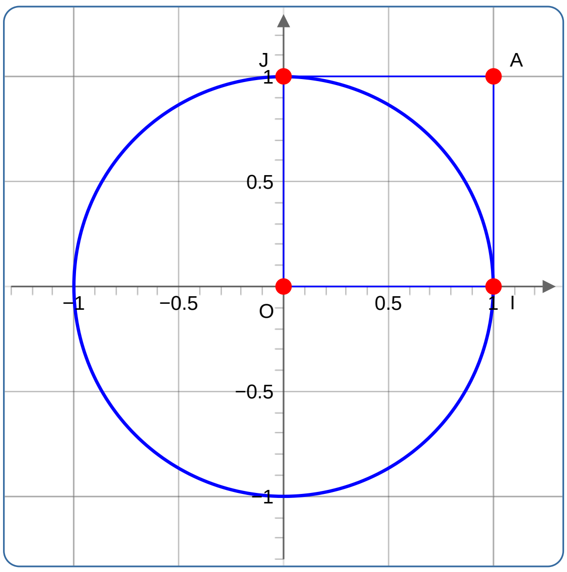
3. Après avoir exécuté plusieurs fois cet algorithme, que peut-on dire des résultats par rapport à la fréquence attendue ?
4. En posant $f = \dfrac{1}{2}$ et $n = 400$ comme dans l'algorithme, les résultats affichés sont-ils souvent dans l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$?
5. Expliquer ce que permet de faire l'algorithme ci-dessous

```
from random import*
from math import*

n = 400
f = 0.5
c = 0

for k in range(1,100):
  s = 0
  for i in range(0,n):
    p = randint(0,1)
    if p == 0:
      s = s + 1
  if s/n > f-1/sqrt(n) and s/n < f+1/sqrt(n):
    c = c + 1
print(c/100)
```

6. Interpréter les résultats affichés après exécution de ce dernier programme.

Exercice 6

On se place dans un repère orthonormal du plan (O, I, J) et on considère le cercle de centre O et de rayon 1, ainsi que le carré $OIAJ$ comme ci-dessous.



1. Soit $M(x; y)$ un point de ce repère. Expliquer pourquoi est-ce que si M appartient au quart de cercle inclus à l'intérieur du carré $OIAJ$, alors ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

2. Trouver une condition similaire sur les coordonnées de M caractérisant le fait qu'il appartiennent au quart de disque inscrit dans le carré $OIAJ$.
3. On dessine au hasard le point M à l'intérieur du carré $OIAJ$. Quelle est la probabilité p qu'il se trouve à l'intérieur du quart de disque ?
4. Expliquer ce que fait l'algorithme suivant :

```
from random import*

c = 0
x = random()
y = random()

if x*x+y*y < 1:
        c = c + 1
```

5. Compléter ce programme pour qu'il simule l'apparition de 1000 points dans le carré $OIAJ$ et qu'il retourne la fréquence de points appartenant au cercle.
6. Sachant que pour 1000 points générés aléatoirement, la fréquence f de ceux qui appartiennent au cercle vérifie $f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{1000}}; p + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right]$, montrer que :

$$\pi \in \left[4f - \frac{4}{\sqrt{1000}}; 4f + \frac{4}{\sqrt{1000}}\right]$$

7. En déduire un encadrement de π.
8. Cette méthode s'appelle la méthode de Monte Carlo. Est-elle efficace pour approcher π ?