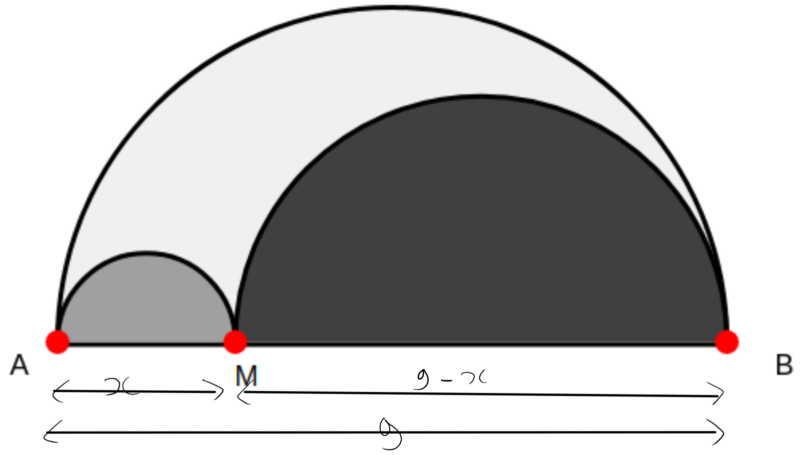
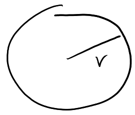
Exercice 7





πr^2

$\frac{\pi}{2} r^2$

On cherche à déterminer quand est-ce que l'aire de la partie colorié en clair et maximale.

1. Émettre une conjecture par rapport à notre problème.
2. Quelles sont les valeurs possibles du nombre x ?
3. Déterminer l'aire de chacun des trois demi-disques de la figure.

$$\mathcal{A}_{[AB]} = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 81 \times \frac{\pi}{8}$$

$$\mathcal{A}_{[AM]} = \frac{\pi}{8} x^2$$

$$\mathcal{A}_{[MB]} = \frac{\pi}{8} (81 - 18x + x^2)$$

4. En déduire l'aire de la partie hachurée en fonction de x. On notera celle-ci $A(x)$.

$$A(x) = \mathcal{A}_{[AB]} - \mathcal{A}_{[AM]} - \mathcal{A}_{[MB]}$$

$$= 81 \times \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} x^2 - \frac{\pi}{8} (81 - 18x + x^2)$$

$$= \frac{\pi}{8} (81 - x^2 - (81 - 18x + x^2))$$

$$= \frac{\pi}{8} (81 - x^2 - 81 + 18x - x^2)$$

$$= \frac{\pi}{8} (-2x^2 + 18x)$$

$$= \frac{\pi}{8} (2x \times (-x) + 2x \times 9)$$

$$= \frac{\pi}{8} \times 2x (-x + 9)$$

$$\boxed{A(x) = \frac{\pi}{4} x (9 - x)}$$

5. Tracer dans le repère fourni en annexe, la courbe représentative de la fonction A.

6. Trouver graphiquement la réponse à notre problème.

La fonction A semble atteindre son maximum par $x = 4,5$.

Ainsi $AM = 4,5$ et M semble être au milieu de $[AB]$.

7. Construire le tableau de variations de la fonction A sur son ensemble de définition.

$[0;9]$

x	0		4,5		9
$A(x)$			$\approx 15,9$		
		↗		↘	
	0				0

8. Interpréter ce tableau de variations en termes d'évolution de l'aire de la partie hachurée.

9. Démontrer que : $A(x) = \frac{\pi}{4}(20,25 - (x - 4,5)^2)$.

$\frac{\pi}{4}(20,25 - (x-4,5)^2) = \frac{\pi}{4}(20,25 - (x^2 - 9x + 20,25))$

$= \frac{\pi}{4}(20,25 - x^2 + 9x - 20,25)$

$= \frac{\pi}{4}(9x - x^2)$

$= \frac{\pi}{4}x(9 - x)$

$= A(x)$ □

$(a-b)^2$
$=$
$a^2 \underbrace{- 2ab}_{\text{Double produit}} + b^2$

$\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$

40,5
20,25

$4,5^2$
$=$
$(4+0,5)^2$
$16 + 4 + 0,25$

10. En déduire la valeur exacte de x pour que $A(x)$ soit maximale.

$(x-4,5)^2$ est toujours positif en tant que carré.

Ainsi, la différence $20,25-(x-4,5)^2$ est maximale lorsque

$x-4,5=0$ à savoir $x=4,5$.

L'aire est donc maximale pour $x=4,5$, c'est-à-dire pour M au milieu de [AB].