Enseignement scientifique ~ Évolution et suites numériques

1 Définition

Définition 1

Une est une fonction dont la variable est un
Une suite u est définie ainsi par :

Remarque 1

En enseignement scientifique les suites modéliseront des de populations. L'entier n représentera ainsi généralement un palier temporel : nombre d'années, de mois, de semaines ou encore des heures etc.
Pour un entier n donné, $u(n)$ représentera le plus souvent un effectif.

2 Progression linéaire

Définition 2

Une suite u est dite en progression si pour passer d'un terme à on toujours le même nombre.
Ce nombre s'appelle la de la suite.

Exercice 1

Dans une exploitation agricole le nombre de lapins, en tenant compte des naissances, des décès et des ajouts par le propriétaire, augmente chaque année de 20 individus.
L'année de rang 0, l'exploitation possède 112 lapins.
On note $u(n)$ le nombre de lapins dans cette exploitation l'année de rang n.

1. Déterminer le nombre de lapins dans l'exploitation l'année de rang 1 puis de rang 2.
2. Calculer $u(5)$ puis $u(18)$.

Correction

1. L'année de rang 1 le nombre de lapins est de L'année de rang 2 :
2.
3.

×

Propriété 1

Soit u une suite suivant une progression linéaire de raison r. Pour tout entier n :

Exemple 1

À l'instant $n = 0$ un vivarium contient 4 mouches. On en ajoute 10 par minutes.
En note u la suite modélisant l'évolution du nombre de mouches dans ce vivarium on a que u est une suite suivant une progression linéaire de raison 10.
Ainsi, au bout de 12 heures le vivarium contient mouches.
Au bout d'un nombre d'heures n indéterminé le vivarium contient mouches.

3 Progression exponentielle ∼ Modèle de Malthus

Définition 3

Une suite u est dite en progression si pour passer d'un terme à on toujours par le même nombre.
Ce nombre s'appelle la de la suite.

Exemple 2

On cultive dans une cuve des levures. Chaque heure le nombre de levures augmente de 3 %. À l'instant $n = 0$ la quantité de levure est de 20 kg.
On note q la suite modélisant l'évolution de la quantité en kg de levure dans cette cuve. On a alors : $q(0) =$
De plus, la quantité de levure au bout d'une heure est de
De même $q(2) =$

L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la quantité de levure après un nombre d'heures souhaité :

```python
def q_levure(n):
    q = ...
    for i in range(0,...):
        q = ...
    return q

print(q_levure(2))
```

À l'aide de cet algorithme on peut déterminer au bout de combien de temps la population de levure aura doublé :

Remarque 2

Le modèle de croissance exponentielle porte aussi le nom de modèle de du nom de l'économiste britanique Thomas Malthus (1766 - 1834) qui étudia la dynamique des populations et présenta une thèse pessimiste quand à la croissance exponentielle des populations : sa crainte tournait autour de l'idée que la progression démographique (exponentielle) soit plus rapide que l'augmentation des ressources (arithmétique).

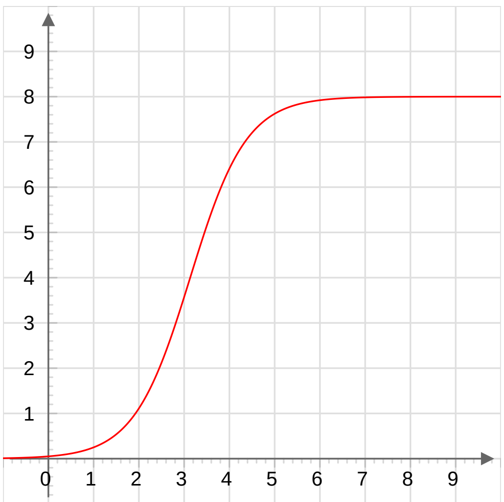
Propriété 2 Soit u une suite suivant une progression exponeitelle de raison q. Pour tout entier n :

Exemple 3

En reprenant la situation avec la cuve contenant les levures on a :

4 Modèle de Verhulst

Le modèle proposé par Malthus n'est pas réaliste sur un laps de temps important. En effet, une population ne peut croître indéfiniment. De nombreux facteurs vont finir par limiter sa progression et même si la croissance peut être exponentielle dans un premier temps elle va finir par ralentir puis se stabiliser.



Le mathématicien belge Pierre-François Verhulst propose en 1848 un modèle non exponentiel décrivant l'évolution des populations animales.

Définition 4

Une suite u suit le modèle de Verhulst si il existe deux réels strictement a et K tels que pour tout entier n :

Exemple 4

Soit u une suite modélisant l'évolution du nombre de lapins d'un écosystème donné.

En 2015 la population de ce groupe s'élevait à 130 individus.

On note $u(n)$ la population de lapins de cet écosystème l'année $2015+n$. On a donc $u(0)=130$ et on admet que :

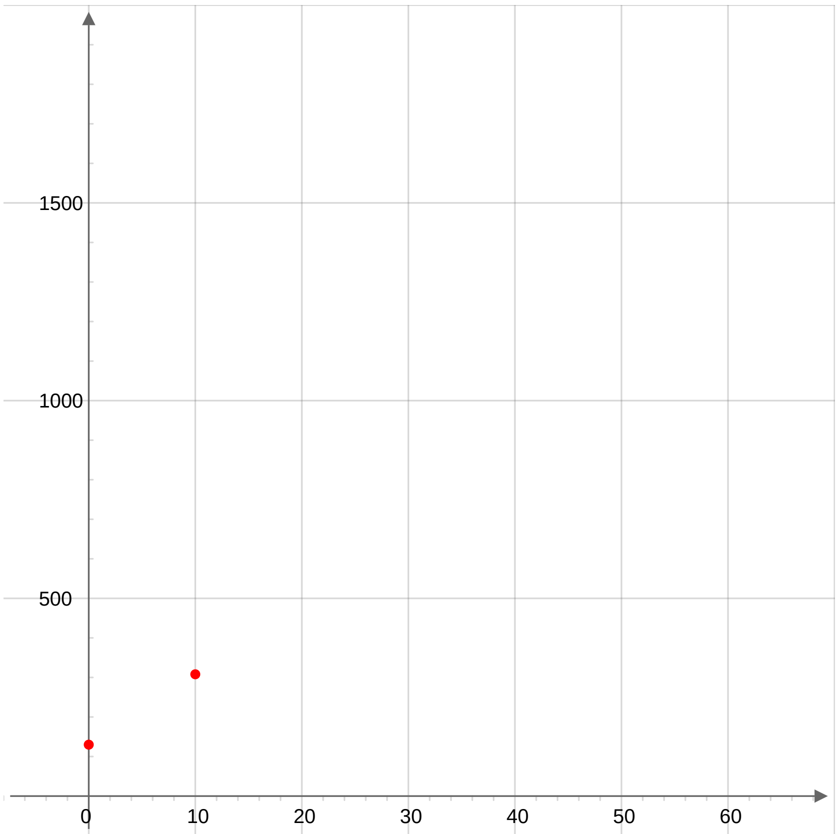
$$u(n+1)=0,1u(n)\left(1-\frac{u(n)}{2\,000}\right)+u(n).$$

On peut calculer le nombre de lapins l'année 2016 à l'aide de ce modèle :

En utilisant l'algorithme ci-dessous, on complète le graphique donné :

```python
def lapins(n):
    u = 130.0
    for i in range(0,n):
        u = 0.1*u*(1-u/2000)+u
    return u

print(lapins(0))
```



5 Exercices

Exercice 2

Le nombre d'habitants de la population des Hauts-de-France a augmenté d'environ 9 420 par an de 1990 à 1999. En 1990, il était de 5 770 671 habitants.

1. En prenant comme année $n=0$ l'année 1990, écrire le terme général de la suite arithmétique décrivant la population des Hauts-de-France (notée u), en précisant son premier terme et sa raison. (On suppose que l'augmentation reste constante.)
2. Calculer la population de cette région en 1999.

3. En réalité, en 2008, sa population était de 5 931 091. Calculer l'estimation en 2008 et la comparer avec le nombre réel à l'aide d'un pourcentage.

Exercice 3

En Occitanie, la population a été multipliée par 1,007 1 chaque année entre 1990 et 1999. En 1990, la population était de 4 546 249 habitants.

1. En prenant comme année $n = 0$ l'année 1990, écrire le terme général de la suite géométrique décrivant la population en Occitanie (notée v), en précisant son premier terme et sa raison.
2. Calculer alors la population de cette région en 1999.
3. En réalité, en 2008, sa population était de 5 419 946. Calculer l'estimation en 2008 en supposant le taux de croissance constant et la comparer, à l'aide d'un pourcentage, avec le vrai nombre.

Exercice 4

En 2014, le taux de natalité francilien est de 1,52 %, alors que le taux de mortalité est de 0,6 %. L'Île-de-France compte 12 027 565 habitants au 1er janvier 2014 (données Insee).

1. Calculer le taux d'accroissement (différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité) de la population d'Île-de-France pour l'année 2014.
2. Écrire le terme général de la suite u donnant la population francilienne au bout de n années, en prenant l'année 2014 pour le rang 0 selon ce modèle de croissance exponentielle.
3. Estimer alors la population francilienne en 2016 et comparer cette estimation avec le nombre donné par l'Insee : 12 117 131 habitants.

Exercice 5

Une population de bactéries à un taux de natilité de 2 % et un taux de mortalité de 5 % d'un jour à l'autre. On estime que ces taux restent constants au cours du temps.
Après combien de jours cette population de bactéries sera-t-elle réduite de moitié ?