Enseignement scientifique ∼ Ajustement affine

1 - Rappels

Définition 1 -- Fonction affine
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite lorsqu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

Les nombres a et b sont respectivement appelés le

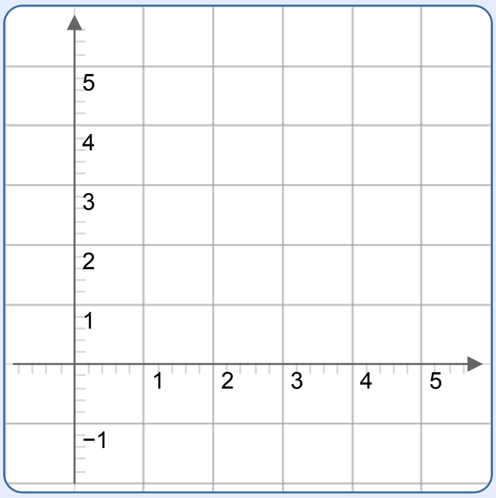
Propriété 1
- Si le coefficient directeur a est strictement la fonction affine est
- Si le coefficient directeur a est strictement la fonction affine est
- Si le coefficient directeur a est la fonction affine est

Exercice 1

Représenter dans un repère du plan la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Correction

On détermine les coordonnées de deux points :
Pour on a
Pour on a

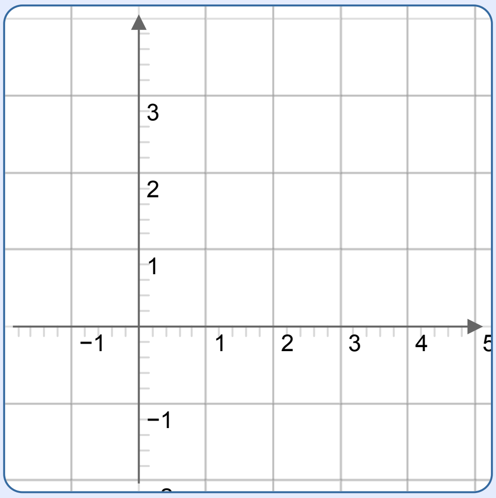


Exercice 2

Représenter dans un repère du plan la droite d'équation $y = 2$.

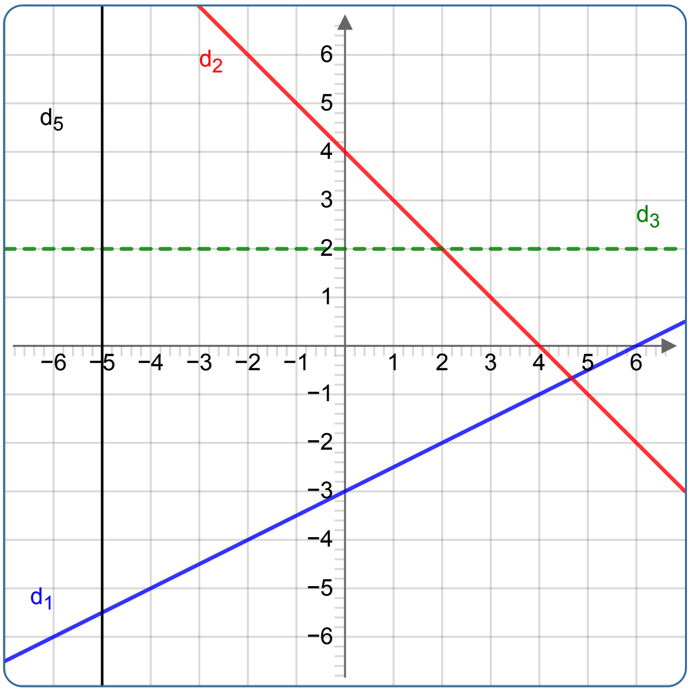
Correction

La droite est ici



Exercice 3

Dans le repère ci-dessous déterminer une équation pour chacune des droites tracées.



Correction

d_1 :

d_2 :

d_3 :

d_4 :

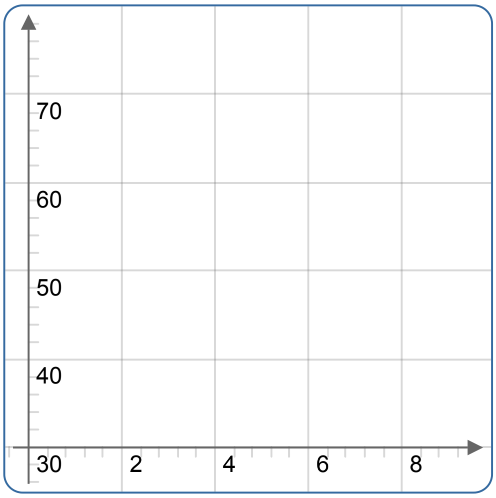
2 - Ajustement affine

2.1 - Introduction

Voici une série statistique représentant l'évolution du chiffre d'affaire d'une entreprise au cours du temps (l'année de rang 0 étant 2010).

Rang de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8
CA en milliers d'euros	$45,3$	$42,2$	$49,8$	$52,1$	$58,8$	$\dots$	$60,5$	$64,1$	$66,4$

Construire dans le repère ci-dessous le nuage de points associé à cette série, puis donner une estimation des valeurs manquantes du tableau.



Remarque 1

Lorsque le nuage de points a une forme   on peut l'approcher par une   , et ainsi avoir une idée des valeurs manquantes ou de futures valeurs. Les droites sont des objets dont on sait trouver assez facilement des équations.

2.2 - Séries statistiques à deux variables

Sur une même population, on peut étudier plusieurs caractères quantitatifs : le chiffre d'affaire d'une entreprise en fonction des années, ou la distance de freinage d'un véhicule en fonction de la vitesse initiale, ou encore le nombre de bactéries dans une solution en fonction de la température du milieu, ou bien la charge de rupture de tiges en acier en fonction de leur teneur en carbone etc.

Le but est de déterminer si il existe un   entre les deux caractères étudiés.

Définition 2 -- *Séries statistiques à deux variables*
Soient x et y deux caractères d'une population.
À chaque individu de la population, on associe un couple où x_i et y_i sont des valeurs prises par les caractères x et y.
Une **série statistique à deux variables** est

Exemple 1

Le tableau donné en introduction représente une série statistique.

Définition 3 -- *Nuage de points*
Soit une série statistique à deux variables x et y prenant respectivement les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Le plan étant muni d'un repère, on associe au couple
Le associé à la série statistique est l'ensemble des ainsi obtenus.

Exemple 2

Le graphique construit en introduction est un nuage de points associé à la série statistique étudiée.

Définition 4 -- *Point moyen*
Soit une série statistique à deux variables x et y prenant respectivement les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$.
Le du nuage statistique est le point

Exemple 3

Dans la série statistique associée au chiffre d'affaire de l'entreprise au cours du temps, le point moyen est :

2.3 - Ajustement affine

Définition 5 -- *Ajustement affine*
Étant donné une série statistique double et son nuage de points, on peut chercher une fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ passe des points du nuage.
Le problème de l'ajustement consiste à déterminer cette fonction f.
L'ajustement est dit lorsque le graphe $\mathcal{C}$ de cette fonction est

Définition 6 -- *Ajustement au jugé*
Si les points du nuage statistique d'une série double semblent alignés, on peut tracer c'est-à-dire, visuellement au plus proche des points du nuage.

Exemple 4

C'est la méthode que nous avons employée en introduction.

Remarque 2

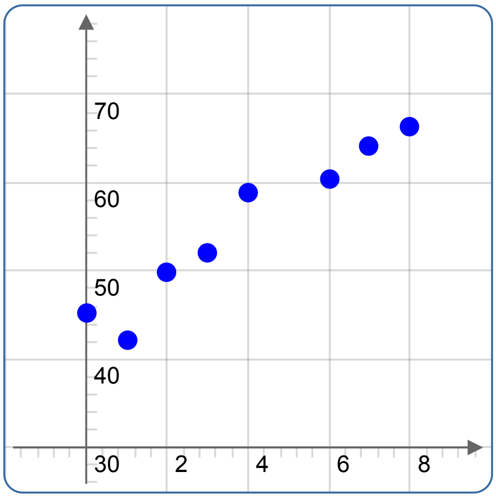
Lorsqu'on effectue un ajustement au jugé il y a une de possiblités et le choix de la droite d'ajustement n'est donc pas

Définition 7 -- *Méthode des moindres carrés*
On considère une série statistique double et son nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ avec i compris entre 1 et n.
Soit une droite d d'équation À chaque point du nuage de points, on associe le point de la droite d.
Pour chaque i, on calcule et on les ajoute pour obtenir :

La méthode des consiste à déterminer les valeurs de pour que la somme E soit

Exemple 5

En reprenant la série statistique représentant l'évolution du chiffre d'affaire, on a le graphique suivant :



Évolution du chiffre d'affaire d'une entreprise

Propriété 2

Soit une série statistique à deux variables x et y prenant respectivement les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

La droite obtenue par la méthode des moindres a pour équation $y = ax + b$ avec :

Remarque 3

Cette formule n'est pas à apprendre, les valeurs de a et b seront obtenues en manipulant la calculatrice. On peut d'ailleurs l'obtenir également à l'aide d'un tableur.

Propriété 3

La droite des moindres carrés passe par du nuage de points.

Exemple 6

Dans l'exemple de l'évolution du chiffre d'affaire, on obtient pour équation de la droite d'ajustement affine (en appliquant la méthode des moindres carrées à la calculatrice) :

Ainsi, pour l'année de rang 5 (soit en), avec cet ajustement on obtient un chiffre d'affaire de :

3 - Exercice

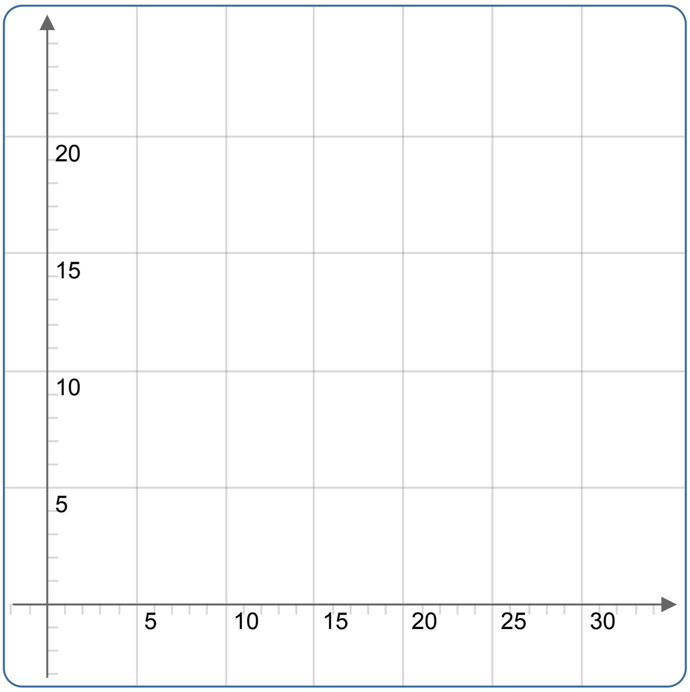
Exercice 4

On mesure l'allongement X de la tige d'une tomate, exprimé en mm/j, en fonction de la température diurne T, exprimée en °C.

Le tableau suivant fournit le relevé des valeurs du couple de variables statistiques (T, X).

t_i	5	7	10	13	15	18	20	22	25	28	30
x_i	1	2	3	6	8	10	11	15	17	20	23

1. Construire le nuage de points représentant cette série statistique double. Que suggère l’examen du nuage ?



2. Donner à l'aide de votre calculatrice la droite d'ajustement de X en T, obtenue par la méthode des moindres carrés.
3. Construire la droite dans le repère précédent.
4. Déterminer l'allongement pour une température diurne de 16 °C.
5. Déterminer l'allongement pour une température diurne de -5 °C et de 100 °C. Que peut-on en déduire ?