Dérivation

Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et x deux réels de I.

Si lorsque x se rapproche de a, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se rapproche d'un nombre alors la fonction f est dite dérivable en a et :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

s'appelle le nombre dérivée de f en a.

Propriétés

Soit f une fonction dérivable en a et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Le nombre dérivée $f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a.
2. L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

Formulaire

Soient a, b, c, d des nombres réels et P un polynôme de degré au plus 3.

$f(x)$	$f'(x)$
c (constante)	0
x	1
ax	a
x^2	$2x$
ax^2	$2ax$
x^3	$3x^2$
ax^3	$3ax^2$
ax^2+bx+c	$2ax+b$
ax^3+bx^2+cx+d	$3ax^2+2bx+c$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{a}{x}$	$-\dfrac{a}{x^2}$
$\dfrac{a}{bx}$	$-\dfrac{a}{bx^2}$
$P(x)+\dfrac{a}{bx}$	$P'(x)-\dfrac{a}{bx^2}$

Sens de variation

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

• Si pour tout $x\in I$, $f'(x)>0$ alors f est strictement croissante sur I.

• Si pour tout $x\in I$, $f'(x)<0$ alors f est strictement décroissante sur I.

• Si pour tout $x\in I$, $f'(x)=0$ alors f est constante sur I.

Application

Ex : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.
Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Sol : Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2\geq 0$.
La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

Lecture graphique

Méthode

Pour déterminer graphiquement un nombre dérivé $f'(a)$ il faut calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en a.

Application

Ex : Dans le repère ci-contre est tracée la courbe représentative d'une fonction f, ainsi que sa tangente en 1. Déterminer $f'(1)$.

Sol : Les points $(1\,;0)$ et $(2\,;3)$ sont sur la tangente. Ainsi :

$$f'(1)=\frac{3-0}{2-1}=3.$$