TSTMG ∼ Probabilités conditionnelles / Indépendance

Dans ce chapitre on considère un univers Ω muni d'une probabilité P.

1 Probabilités conditionnelles

Définition 1

Soit A une évènement tel que $P(A) \neq 0$. La probabilité de notée est définie par :

Remarque 1

$P_B(A)$ se lit : « Probabilité de A sachant que B s'est réalisé ».

Propriété 1

Soient A et B deux évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. On a :

$

Exercice 1

Le tableau ci-contre présente la répartition des salariés d'une entreprise en fonction du type d'emploi et du mode de locomotion utilisé pour se rendre sur le lieu de travail.
On rencontre au hasard un employé de cette entreprise et on considère les évènements :
O : « L'employé est un ouvrier » et V : « L'employé se rend en voiture sur son lieu de travail ».

1. Compléter le tableau.
2. Déterminer $P(O)$ et $P(O \cap V)$.
3. Déterminer de deux façons différentes $P_O(V)$.

	Voiture	Autre	Total
Ouvriers	20	140	
Cadres	28		
Total			200

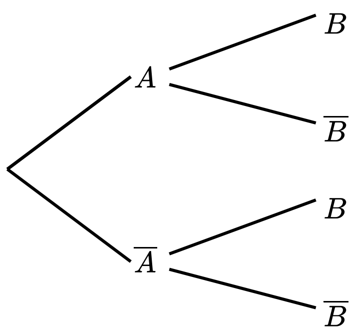
Correction

1.
2. $P(O) =$ et $P(O \cap V) =$
3. En appliquant la formule :

   On retrouve ce résultat à partir du tableau : $P_O(V) =$

Remarque 2

• Les probabilités conditionnelles peuvent s'illustrer à l'aide d'un arbre pondéré.
• La probabilité sur la branche menant de l'évènement A à B est $P_A(B)$.
• Pour obtenir $P(A \cap B)$, on multiplie la probabilité située sur la branche allant vers A par celle située sur la branche qui va de A vers B :
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.



2 Formule des probabilités totales

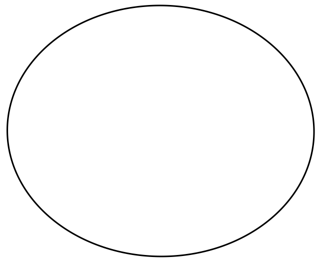
Définition 2

On dit que les ensembles A_1 , A_2 , . . ., A_n forment une de l'univers Ω si et seulement si :

• les ensembles A_1 , A_2 , . . ., A_n sont tous soit :

• les ensembles A_1 , A_2 , . . ., A_n sont soit :

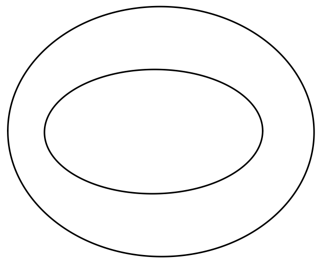
• la réunion des ensembles A_1 , A_2 , . . ., A_n donne soit :



Propriété 2 -- *Formule des probabilités totales*

Soient A_1 , A_2 , . . ., A_n une de Ω. Pour tout évènement B de Ω, on a :

ou encore



Exercice 2

Un laboratoire met au point un test rapide de dépistage d'une maladie identifiable par une prise de sang. Le laboratoire publie les données suivantes obtenues à l'issue d'études cliniques :
• La population étudiée comporte 50 % d'individus malades.
• Si un individu est malade, le test est positif dans 99 % des cas.
• Si un individu n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas.
L'OMS (Organisation Mondiale de la Santé) estime qu'un test est fiable si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un individu soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à $0,999\,9$.
On choisit un individu au hasard parmi la population étudiée et on considère les évènements :
M : « l'individu est malade » et T : « le test est positif ».
Déterminer si le test est fiable ?

Correction

On illustre la situation à l'aide d'un arbre pondéré :

D'après la formule des probabilités :

De plus :

Ainsi :

D'après les critères de l'OMS, le test

3 Indépendance

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.

Définition 3

L'évènement B est de l'évènement A si et seulement si

Propriété 3

• Si B est indépendant de A, alors On dira alors que A et B sont

• Si A et B sont indépendants, alors et et et sont

Propriété 4

A et B sont indépendants si et seulement si

Preuve

A et B sont indépendants si et seulement si

si et seulement si

si et seulement si

Remarque 3

Intuitivement l'évènement B est indépendant de l'évènement A si la connaissance de A ne modifie pas la probabilité de B. On veillera cependant en exercice à ne jamais se baser sur l'intuition pour démontrer que deux évènements sont indépendants mais en utilisant seulement les formules du cours.

Exercice 3

Une certaine année, 65 % des élèves de terminale d'un lycée étaient en filière générale, les autres en filière technologique.
Parmi les élèves de terminale générale, 90,1 % ont réussi le baccalauréat, tandis que 84,5 % des élèves de terminale technologique ont obtenu leur diplôme.
On choisit un élève au hasard parmi les élèves de terminale de ce lycée. On définit les évènements suivants :
B : « l'élève a obtenu le baccalauréat » et T : « l'élève était en terminale technologique ».
Déterminer si les évènements B et T sont indépendants.

Correction

On construit un arbre pondéré illustrant la situation :

On compare alors

On sait que

De plus, d'après la formule des

Ainsi, et on peut affirmer que les évènements B et T