TSTMG ∼ Variables aléatoires discrètes finies - Loi binomiale

1 Introduction

Exercice 1

Compléter le tableau suivant :

1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	...	...	1	
1	...	...	...	...	...

Correction

On complète les cases vides en le nombre de la case juste avec celui-ci de celle qui est juste de cette dernière.
Le 6 est par exemple obtenu en additionnant les deux 3 qui sont juste au-dessus.

Remarque 1

Ce tableau s'appelle « le triangle de ».

2 Variable aléatoire discrète finie

Définition 1

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.

• Une X est une définie sur Ω et à valeurs dans On dit que X est discrète et finie si elle prend un nombre de valeurs

• La de la variable aléatoire discrète finie X est la fonction qui à chaque

On peut résumer cela dans un tableau :

On a de plus :

Exemple 1

Un jeu d'argent consiste à lancer un dé équilibré à six faces. Si on obtient la face 6, on gagne 10 euros, si on obtient la face 1, on perd 5 euros, et pour les autres faces on perd 2 euros. On note X la variable aléatoire correspondant au gain après un lancer du dé.
L'expérience aléatoire est le lancer du dé.
On a : $\Omega =$ Comme le dé est équilibré, il y a et donc :

La variable aléatoire X prend comme valeurs :

La loi de probabilité de la variable aléatoire X peut être résumée dans un tableau.

On vérifie que

Remarque 2

Soit k un entier naturel. L'évènement correspond à la réunion de tous les évènements

Dans l'exemple précédent, on a :

De même, on peut définir les évènements :
On a, par exemple : car $\{X \leq k\}$ est l'évènement de $\{X > k\}$.

Définition 2

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
de la variable aléatoire X, notée est la des valeurs x_i par leur probabilité $P(X = x_i)$:

Exemple 2

En reprenant le jeu d'argent précédent, nous avons :

Il n'est pas de jouer à ce jeu, car en moyenne, on d'euro par partie.

Exemple 3

Voici un algorithme Python permettant de déterminer l'espérance d'une variable aléatoire discrète finie.

```
def esp(X,P):
    n = len(X)
    e = 0.0
    for i in range(0,n):
        e = e +X[i]*P[i]
    return e

X = [-5,-2,10]
P = [1.0/6, 4.0/6, 1.0/6]
print esp(X,P)
```

3 Loi binomiale

Définition 3 -- *Épreuve de Bernoulli*

Une épreuve de de paramètre p, avec $p \in [0\,;1]$, est une expérience aléatoire qui n'a que l'une appelée qui a pour probabilité p, et l'autre appelée qui a pour probabilité

Exemple 4

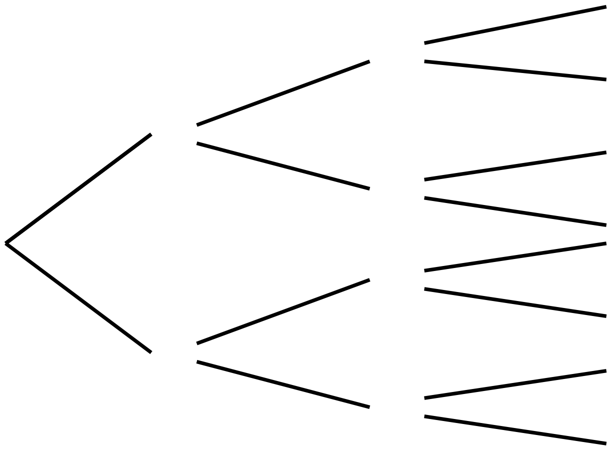
On possède une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir pile est de $0,8$. Le fait de lancer cette pièce de monnaie et de regarder si on obtient pile ou non est une

Définition 4 -- *Coefficient binomial*

Soient n et k deux entiers naturels avec k compris entre 0 et n. On considère une épreuve de Bernoulli que l'on n fois et on représente la situation par un arbre.
est défini comme le nombre de dans l'arbre conduisant à

Exemple 5

On lance trois fois la pièce de monnaie précédente et on s'intéresse à la variable aléatoire X qui compte le nombre de piles obtenus. On modélise la situation par l'arbre pondéré ci-dessous :



• Un seul chemin mène à aucun succès et donc :

• Trois chemins mènent à un seul succès et donc :

• Trois chemins mènent à deux succès et donc :

• Un seul chemin mène à trois succès et donc :

On peut ainsi déterminer la loi de probabilité de X. En effet :

• $P(X = 0)$

• $P(X = 1)$

• $P(X = 2)$

• $P(X = 3)$

Résultats que l'on peut résumer dans le tableau ci-dessous :

X (nb de piles)	0	1	2	3
Probabilité				

On a de plus :

Résultat qui peut se traduire en disant, qu'en moyenne en lançant trois fois cette pièce de monnaie on obtient
ou encore, en lançant fois cette pièce on obtient en moyenne piles.

Remarque 3

Les coefficients binomiaux peuvent s'obtenir à l'aide du triangle de Dans la première colonne, tous les coefficients binomiaux valent
Chacun des termes d'une ligne est obtenue en le terme de la ligne immédiatement avec celui juste de ce dernier.

Ici, par exemple, le 6 dans l'encadrement est obtenu en faisant dans la ligne précédente.

Pour avoir $\binom{4}{3}$, on lit le coefficient situé ligne et colonne

On trouve $\binom{4}{3} =$

On a aussi $\binom{5}{2} =$

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2						
3						
4						
5						

Définition 5 -- *Loi binomiale*

Soient n un entier naturel non nul et p un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
On répète
de la variable aléatoire qui s'appelle
de paramètres On la note

Exemple 6

Dans l'exemple précédent de la pièce de monnaie truquée lancée trois fois, la variable aléatoire X suit
de paramètres On note

Propriété 1

Soient n un entier naturel non nul et $p \in [0\,;1]$.
Si X est la variable aléatoire suivant la loi de paramètres pour tout entier naturel $k \leq n$, on a :

Exemple 7

On lance 5 fois de suite la pièce de monnaie truquée précédente (la probabilité d'obtenir pile étant de $0,8$).
La variable aléatoire Y qui compte suit la loi binomiale de paramètres et :

Remarque 4

Le calcul précédent peut se faire également à la calculatrice.

Propriété 2 -- *Espérance*

Soient n un entier naturel non nul et $p \in [0\,;1]$. Si la variable aléatoire X suit la loi binomiale alors l'espérance de X vérifie :

Exemple 8

La variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,;0,8)$ a pour espérance :