TSTMG ∼ Fonction inverse

Exercice 1

Donner l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

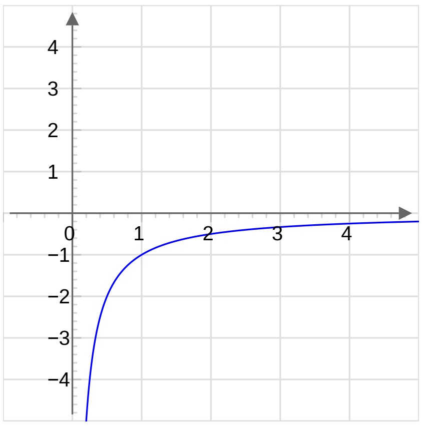
1. $f(x) = 2x - 4$.
2. $f_1(x) = 6 - 3x$.
3. $g(x) = \dfrac{3}{x}$.
4. $g_1(x) = -\dfrac{5}{x}$.
5. $h(t) = t^2 - 16 + \dfrac{1}{t}$.
6. $h_1(t) = 3t^2 - 1 - \dfrac{4}{t}$.
7. $i(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5 - \dfrac{2}{x}$.
8. $i_1(x) = -5x^3 - 7x^2 + 51 + \dfrac{20}{x}$.
9. $j(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{1}{4}t^2 - \dfrac{4}{5t} + 1\,993$.
10. $j_1(t) = \dfrac{1}{6}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{8}{7t} + 13$.
11. $k(x) = (2x - 5)x^2 + \dfrac{3}{4x}$.
12. $k_2(x) = (2x - 5)^2 - \dfrac{31}{4x}$.
13. $m(x) = \dfrac{5}{2x} + (3x - 7)(4x^2 + 1) - 5x^3$.
14. $m_1(x) = -\dfrac{3}{8x} + (3 - 7x)(4x + 1) - \dfrac{1}{3}x^3$.

Exercice 2

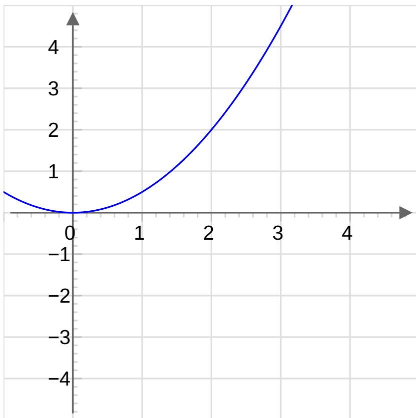
Soit f, g, h et i quatre fonctions telles que :

- $f(x) = 0,5x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $g(x) = x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $h(x) = \dfrac{2}{x}$, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,
- $i(x) = -\dfrac{1}{x}$, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.

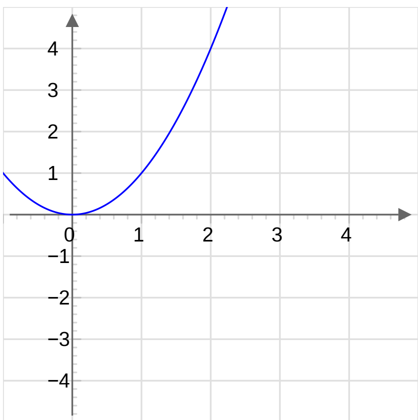
Les quatre courbes ci-dessous représentent chacune le graphe d'une de ces fonctions. Déterminer quel graphique correspond à quelle fonction.



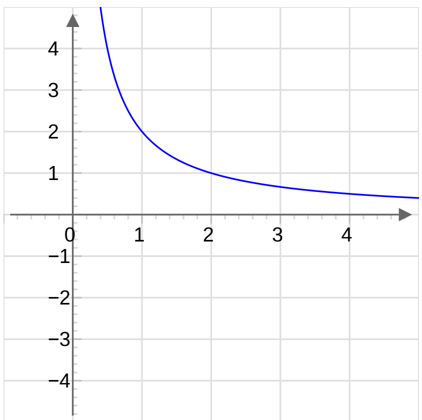
Graphique n°1



Graphique n°2



Graphique n°3



Graphique n°4

Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a. $\dfrac{2}{x}+3=\dfrac{5}{x}+14$

b. $\dfrac{3}{x+1}=0$

c. $\dfrac{2x+1}{x-3}=0$

d. $\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{x+3}{9}$

e. $\dfrac{1-4x}{x+7}>0$

f. $\dfrac{1}{8x+6}\leq\dfrac{1}{4x-5}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0\,;50]$ par $f(x)=-x^2+10x+7$.

1. Donner l'expression de $f'(x)$.
2. Résoudre l'équation $f'(x)=0$.
3. Compléter le tableau de variations de f sur $[0\,;50]$ donné ci-dessous :

x	0 $\qquad\qquad$ 50
$f'(x)$	
$f(x)$	

4. Donner alors la valeur maximale de f sur $[0\,;50]$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=0,1x^2-0,2x-1,5$.

1. Montrer que $f(x)=0,1(x-5)(x+3)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit g la fonction définie sur $[1\,;20]$ par $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3-6x^2+20x+5$.

1. Déterminer pour tout $x\in[1\,;20]$ l'expression de $g'(x)$.
2. Justifier que $g'(x)=(x-2)(x-10)$.
3. En déduire le tableau de variations de g sur $[1\,;20]$.

Exercice 7

Soit h la fonction définie sur $[1\,;10]$ par $h(t)=4t+\dfrac{9}{t}$.

1. Déterminer pour tout $t\in[1\,;10]$ l'expression de $h'(t)$.
2. Justifier que $h'(t)=\dfrac{(2t-3)(2t+3)}{t^2}$.
3. En déduire le tableau de variations de h sur $[1\,;10]$.

Exercice 8

Une entreprise qui fabrique des microcontrôleurs estime que pour une production de x milliers de pièces son bénéfice est de $b(x)=0,2x-\dfrac{50}{x}+2$ centaines de dollars. On estime que l'ensemble des usines de l'entreprise permet une production comprise entre

$1\,000$ et $20\,000$ pièces.

1. Déterminer l'intervalle I auquel appartient x.
2. La fonction b est-elle croissante sur I ?
3. Combien de solution(s) semble posséder l'équation $b(x) = 0$ sur I ?
4. Que représente pour la fonction b le résultat afficher par l'algorithme suivant ?

```python
def b(x):
    return 0.2*x-50/x+2

x0 = 1
while b(x0) < 0:
    x0 = x0+0.001
print(x0)
```

Exercice 9

La consommation d'essence C d'une voiture, aux 100 km, s'exprime en fonction de sa vitesse v par : $C(v) = 0,05v + \dfrac{80}{v}$, où C est en litres et v en km/h.
On suppose que la vitesse v de la voiture est comprise entre 20 km/h et 130 km/h.

1. Calculer la dérivée $C'(v)$.
2. Résoudre l'inéquation $C'(v) > 0$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction C.
4. Pour quelle vitesse v la consommation est-elle minimale ? Quelle est alors cette consommation minimale ?

Exercice 10

Partie A
Chaque semaine, une entreprise de détergent liquide estime que le coût de production (en euros) peut être modélisé par une fonction C donnée par $C(x) = x^2 + 60x + 121$ où x est le volume de détergent produit (en m^3), avec $x \in [1\,;30]$.
Soit f la fonction représentant le coût moyen de production par m^3 de détergent produit.

1. Montrer que pour tout $x \in [1\,;30]$, $f(x) = x + 60 + \dfrac{121}{x}$.
2.
   a. Calculer $f'(x)$.

   b. Montrer que pour tout $x \in [1\,;30]$: $f'(x) = \dfrac{(x-11)(x+11)}{x^2}$.
3. Le dresser le tableau de variations de f sur $[1\,;30]$.
4. Quel est le coût moyen de production minimal ? Pour quelle quantité de détergent est-il obtenu ?

Partie B
Le détergent est vendu à 110 €/m^3 et on suppose que toute la production est vendue. Le bénéfice est donné par la fonction B.

1. Montrer que pour tout $x \in [1\,;30]$: $B(x) = -x^2 + 50x - 121$.
2. Étudier les variations de B sur $[1\,;30]$.
3. Quel est le bénéfice maximal ? Pour quelle quantité de détergent est-il obtenu ?

Exercice 11

Une chaîne de production fabrique des pièces de sécurité pour le transport maritime. Le coût total de production, en euros, de x boîtes fabriquées est donné par la fonction $C_T(x) = x^3 - 90x^2 + 2\,700x + 8\,836$.

1. Déterminer les coûts fixes.
2. Quel est le coût total pour une production de 10 pièces ?
3. On appelle coût marginal la variation du coût de production pour une unité supplémentaire produite. On le note $C_m(x)$.
   a. Justifier que $C_m(x) = C_T(x+1) - C_T(x)$.
   b. On admet que $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
   Donner alors l'expression de $C_m(x)$ en fonction de x.
   c. Les économistes estiment que $C_m(x) \approx C'_T(x)$. Cette approximation est-elle justifiée ici ?
4. On estime dans cette question que $C_m(x) = C'_T(x)$.
   Le coût moyen, que l'on note $C_M(x)$ est le coût de production d'une pièce.

a. Justifier que pour $x > 0$, $C_M(x) = x^2 - 90x + 2\,700 + \dfrac{8\,336}{x}$.

b. Déterminer, pour tout $x > 0$, l'expression de $C'_M(x)$.

c. Montrer que, pour tout $x > 0$, $C'_M(x) = \dfrac{2x^3 - 90x - 8\,336}{x^2}$.

d. Développer $(x - 47)(2x^2 + 4x + 188)$.

e. En déduire que $C'_M(x) = \dfrac{(x - 47)(2x^2 + 4x + 188)}{x^2}$.

f. Déterminer les variations de $C_M(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

g. Dans le repère ci-dessous on a tracé les courbes de C_M et C_m. Identifier chacune d'elle puis expliquer ce que représente en terme de coût l'intersection de ces deux courbes.