TSTMG ~ Suites

1 Activité préparatoire

Un couple de parents, dont les enfants ont respectivement 6 et 9 ans, vient de gagner une grosse somme d'argent. Il décide de leur donner à leurs 18 ans la somme de $20\,000$ €.

Première méthode
Les parents décident de mettre des versements constants chaque année dans un coffre fort de leur maison. Combien doivent-ils donner à chaque anniversaire à chacun de leurs enfants pour atteindre le montant voulu ?

Deuxième méthode
Les parents effectuent un versement identique chaque année sur un compte en banque au taux de $1,5$ % (intérêts composés). Combien doivent-ils donner chaque année à chacun de leurs enfants pour atteindre le montant voulu ?

Troisième méthode
Les parents effectuent un seul versement, pour chaque enfant, sur un compte en banque au taux de $1,5$ % (intérêts composés). Quel doit-être le montant du placement pour atteindre $20\,000$ € ?

Conclusion : Quelle est la meilleure méthode pour les parents ?

2 Exercices du chapitre

Exercice 1

Compléter le tableau suivant pour déterminer les premiers termes des suites arithmétiques (u_n), (v_n) et (w_n).

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	5	8					
v_n		35		27			
w_n		17				31	

Exercice 2

Compléter le tableau suivant pour déterminer les premiers termes des suites géométriques (u_n), (v_n) et (w_n) dont les raisons sont positives. Les résultats seront, si nécessaires, arrondis à 10^{-1}

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	100	90					
v_n		8		32			
w_n			3		9		

Exercice 3

1. Soit (a_n) une suite arithmétique telle que $a_{10} = 125$ et $a_{50} = 605$. Déterminer la valeur de la raison r de cette suite, puis calculer a_{100}.
2. Soit (b_n) une suite géométrique de raison positive telle que $b_0 = 5$ et $b_2 = 0,312\,5$. Déterminer b_5.

Exercice 4

1. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_{27} = 14$ et $a_{38} = 11$. Déterminer la valeur de la raison r de cette suite, puis calculer u_{50}.
2. Soit (v_n) une suite géométrique de raison positive telle que $v_1 = 10$ et $v_2 = 8$. Déterminer v_{10}.

Exercice 5

Soit (c_n) la suite arithmétique de premier terme $c_0 = 500$ et de raison 10.

1. Donner la valeur de c_1, c_2 et c_{20}.
2. Donner, pour tout entier n, l'expression de c_n en fonction de n.
3. Déterminer le premier entier n tel que $c_n > 1\,000$.
4. Que permet de faire l'algorithme ci-dessous :

```python
def seuil(a):
    n = 0
    c = 500
    while c <= a:
        c = c+10
        n = n+1
    return n

print(seuil(10000))
```

5. Quelle modification faut-il apporter à l'algorithme précédent pour qu'il permette de répondre à la question 3 ?
6. Soit $s_{50} = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{50}$.
   a. Donner l'écriture de s_{50} à l'aide du symbole $\sum$.
   b. Déterminer la valeur de s_{50}.

Exercice 6

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $1,1$.

1. Donner la valeur de u_1, u_2 et u_3.
2. Donner, pour tout entier n, l'expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer le premier entier n tel que $u_n > 1\,000$.
4. Que permet de faire l'algorithme ci-dessous :

```python
def seuil(a):
    n = 0
    u = 500
    while u <= a:
        u = u*1.1
        n = n+1
    return n

print(seuil(10000))
```

5. Quelle modification faut-il apporter à l'algorithme précédent pour qu'il permette de répondre à la question 3 ?
6. Soit $s_{31} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{31}$.
   a. Donner l'écriture de s_{31} à l'aide du symbole $\sum$.
   b. Déterminer la valeur de s_{31}.

Exercice 7

Cet exercice est un QCM. Chacune des questions possède exactement une proposition exacte qu'il faut déterminer.

1. Soit (z_n) la suite géométrique de premier terme $z_0 = 1$ et de raison 2.
   ☐ $z_6 = 64$. ☐ $z_{n+1} = 2^n$. ☐ $z_{10} = 20$.

2. La suite (a_n) telle que $a_{10} = 100$, $a_{11} = 120$ et $a_{12} = 150$ est :
   ☐ arithmétique. ☐ géométrique. ☐ ni arithmétique, ni géométrique.

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = n^2 - 1$.
   ☐ $u_8 = 65$. ☐ $u_{11} = 120$. ☐ $u_{n+1} = n^2$.

4. Soit $s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 200$.
   ☐ $s = 200 \times 200$. ☐ $s = \dfrac{199 \times 200}{2}$. ☐ $s = \dfrac{200 \times 201}{2}$.

5. L'algorithme ci-dessous permet de calculer la valeur d'un des termes d'une suite (u_n).

```
u = 50
for i in range(0,30):
    u = u*0.95
```

Après exécution, la valeur de u représente :
☐ $u_{30} = 50 + 0,95 \times 30$. ☐ $u_{30} = 50 \times 0,95^{30}$. ☐ $u_{31} = 50 \times 0,95^{30}$.

Exercice 8

Une personne emprunte $50\,000$ € à un taux annuel de 2 %. Elle compte rembourser ce prêt en 10 ans.

Chaque annuité (ce que la personne rembourse chaque année) est calculée selon la formule : $a = \dfrac{E \times t}{1-(1+t)^{-n}}$, où

E est le montant emprunté, t est le taux annuel du prêt et n le nombre d'annuités.

1. Quel est le montant de l'annuité ? À quel versement mensuel correspondra-t-elle ?
2. Pour l'année numéro n, on note D_n la dette, I_n les intérêts et $A_n = a - I_n$ l'amortissement.
   Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

n	D_n	A_n	I_n	a
1	$50\,000$	$4\,566,33$	$1\,000$	$5\,566,33$
2	$45\,433,67$			
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

3. Quel est le total des intérêts versés ?
4. Vérifier à l'aide des valeurs du tableau que la suite des amortissements (A_n) est géométrique. On donnera sa raison.

Exercice 9

Un bassin contient 400 litres d'eau. Tous les jours il perd 10 % de son volume. On ajoute chaque matin 50 litres d'eau pour compenser la perte.
On note u_n le volume d'eau que contient ce bassin le jour numéro n. On a donc $u_0 = 400$.

1. Déterminer u_1 et u_2.
2. Justifier que pour tout entier n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 50$.
3. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il détermine le volume du bassin après n journées.

```
def volume(n):
    u = 400
    for i in range(0,n):
        u =
    return u
```

4. En utilisant cet algorithme conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
   Déterminer ensuite le premier jour où le volume du bassin dépassera 495 litres.
5. On considère dans cette question la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 500$.

a. Calculer v_0.
b. Montrer que pour tout entier n, $u_n = v_n + 500$.
c. Montrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = 0,9u_n - 450$.
d. En déduire que $v_{n+1} = 0,9v_n$. Que peut-on en conclure pour la suite (v_n) ?
e. Donner alors l'expression de v_n en fonction de n.
f. Montrer que pour tout entier n, $u_n = 500 - 100 \times (0,9)^n$.
g. Le volume du bassin pourra-t-il dépasser 500 litres ?

Exercice 10

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (a_n) où a_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010 + n)$. En 2010, la forêt possède $50\,000$ arbres.
Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter $3\,000$ arbres.

1. Donner la valeur de a_0 et a_1.
2. Justifier que pour tout entier n, $a_{n+1} = 0,95a_n + 3$.
3. En s'inspirant de l'exercice précédent écrire un algorithme permettant de déterminer le nombre d'arbres que possède la forêt au cours de l'année de rang n.
4. En utilisant cet algorithme conjecturer le sens de variation de la suite (a_n).
   Déterminer ensuite la première année où le nombre d'arbres dépassera $55\,000$ unités.
5. On considère dans cette question la suite (v_n) définie pour tout entier n par $b_n = 60 - a_n$.
   a. Calculer b_0.
   b. Montrer que pour tout entier n, $a_n = 60 - b_n$.
   c. Montrer que pour tout entier n, $b_{n+1} = 57 - 0,95a_n$.
   d. En déduire que $b_{n+1} = 0,95b_n$. Que peut-on en conclure pour la suite (b_n) ?
   e. Donner alors l'expression de b_n en fonction de n.
   f. Montrer que pour tout entier n, $a_n = 60 - 10 \times (0,95)^n$.
   g. Le nombre d'arbres de cette forêt pourra-t-il dépasser $60\,000$?