TSTMG ∼ Probabilités conditionnelles / Indépendance

Exercice 1

Soient A et B deux évènements indépendants tels que : $P(A) = 0,3$ et $P(B) = 0,5$. Déterminer $P(A \cap B)$.

Exercice 2

Soient A et B deux évènements indépendants tels que : $P(A \cap B) = 0,09$ et $P(A) = 0,12$. Déterminer $P(B)$.

Exercice 3

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard, et on considère les événements :

- A : « La boule porte un numéro pair » ;
- B : « La boule porte un numéro multiple de 3 ».

Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 4

Dans une usine d'électronique deux chaînes de fabrication, notées c_1 et c_2, produisent un composant pouvant présenter un défaut.
On effectue un contrôle qualité sur un lot de composants dont les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

	c_1	c_2	Total
Composant avec défaut		80	
Composant sans défaut	950		$1\,870$
Total	$1\,000$		

On prélève au hasard un composant électronique de ce lot et on s'intéresse aux évènements suivants :

- D : « Le composant présente un défaut » ;
- C_1 : « Le composant a été produit par la chaîne c_1 ».

1. Compléter le tableau.
2. Les évènements C_1 et D sont-ils indépendants ?

Exercice 5

Avant de lancer une nouvelle campagne de sensibilisation, une association humanitaire a étudié comment se sont répartis, en fonction de leur âge, les 400 donneurs de la campagne précédente, ceux-ci étant soit des donneurs occasionnels, soit des donneurs réguliers.

- On compte 70 % de donneurs occasionnels.
- Parmi les donneurs occasionnels, 30 % ont entre 20 et 34 ans.
- Un tiers des donneurs réguliers a entre 35 et 59 ans.
- Parmi les 198 donneurs âgés de plus de 60 ans, 23 % sont des donneurs réguliers.

1. Compléter le tableau ci-dessous. On arrondira les résultats à l'entier le plus proche.

	Donneurs occassionels	Donneurs réguliers	Total
Entre 20 et 34 ans			
Entre 35 et 59 ans			
Plus de 60 ans			
Total			

2. L'association a établi un fichier de ses donneurs. On prélève au hasard une de ces fiches.
   On considère les évènements suivants :
   - R : « La fiche choisie est celle d'un donneur régulier » et $\overline{R}$ l'évènement contraire.

- A : « La fiche choisie est celle d'un donneur âgé de 20 à 34 ans » ;
- B : « La fiche choisie est celle d'un donneur âgé de 35 à 59 ans » ;
- C : « La fiche choisie est celle d'un donneur âgé de plus de 60 ans ».

a. Calculer $P(B)$.
b. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la fiche d'un donneur régulier âgé de plus de 60 ans ?

3. On considère $P_C(\overline{R})$.
   a. Exprimer cette probabilité par une phrase.
   b. La calculer, au millième près.
   c. Les évènements C et R sont-ils indépendants ?

Exercice 6

Une usine fabrique en grande quantité des plaques de cuivre. Chacune des plaques fabriquées est susceptible de présenter deux défauts : une épaisseur trop importante ou une présence de fissures.
On prélève une plaque au hasard dans la production de cette usine, et on considère les évènements suivants :

- D_1 : « La plaque a une épaisseur trop importante » ;
- D_2 : « La plaque possède des fissures ».

On suppose que les évènements D_1 et D_2 sont indépendants. On admet que $P(D_1) = 0,03$ et $P(D_2) = 0,01$.
Déterminer les probabilités des évènements suivants :

1. La plaque présente les deux défauts.
2. La plaque présente au moins un des deux défauts.
3. La plaque ne présente aucun des deux défauts.

Exercice 7

Aux Etats-Unis, de 1963 à 1977, le présentateur Monty Hall animait le jeu télévisé Let's Make a Deal. L'épreuve finale de ce jeu consistait à placer le candidat devant trois portes : derrière l'une d'entre elles il y avait une superbe voiture mais derrière les deux autres il y avait des chèvres.
Le candidat choisissait une porte puis Monty Hall, qui savait où se trouvait la voiture, ouvrait alors une des deux portes restantes derrière laquelle il y avait une chèvre. Le candidat était alors libre de garder son choix de départ ou de le changer.
Le but de cet exercice est de déterminer la meilleure stratégie.

Partie A - Simulation en Python

1. Si le candidat reste sur son choix initial quelle est la probabilité qu'il gagne la voiture ?

   Nous allons dans cette question simuler un grand nombre de parties lors desquelles le candidat choisit de changer systématiquement de porte.
   Dans l'algorithme ci-contre on estime que la voiture est en position 1 et les chèvres en 2 et 3. Le choix du candidat est représenté par un nombre entier aléatoire entre 1 et 3.
   - Si le choix du candidat est le n°1, le présentateur ouvre la porte n°2 et le candidat choisit la 3.
   - Si le choix du candidat est le n°2, le présentateur ouvre la porte n°3 et le candidat choisit la 1.
   - Si le choix du candidat est le n°3, le présentateur ouvre la porte n°2 et le candidat choisit la 1.

```
1  from random import*
2  def partie():
3     victoire = False
4     choix = randint(1,3)
5     if choix == 1:
6        choix2 = 3
7     if choix == 2 or choix == 3:
8        choix2 = ...
9  
10    if choix2 == 1:
11        victoire = True
12 
13    return victoire
14 
15 print(partie())
```

2.
   a. Cette algorithme simule une seule partie. Compléter la ligne 9.
   b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il simule 1000 parties.

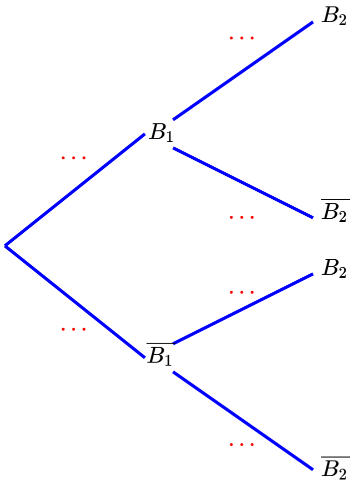
```
from random import*
def partie():
   victoire = False
   choix = randint(1,3)
   if choix == 1:
      choix2 = 3
   if choix == 2 or choix == 3:
      choix2 = ...

   if choix2 == 1:
       victoire = True

   return victoire

nbV = 0
for i in range(0,...):
    if partie():
        nbV = nbV+1
print(nbV/...)
```

Partie B - Avec des probabilités

On se place dans la situation où le joueur modifie son choix lorsque l'animateur révèle l'emplacement dun' chèvre. On considère de plus les évènements suivants :

- B_1 : « Le joueur choisi la bonne porte au premier tour » ;
- B_2 : « Le joueur choisi la bonne porte au deuxième tour » ;
- G : « Le joueur remporte la voiture » ;

1. Compléter l'arbre de probabilité suivant :



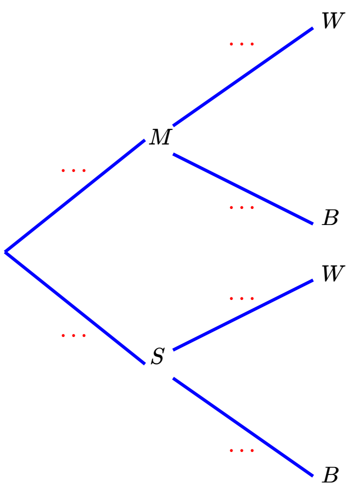
2. En déduire $P(G)$ puis conclure sur la stratégie à avoir.

Exercice 8

Un food truck, ouvert le midi et le soir, propose deux types de formules : la formule Burger et la formule Wok. Le gérant a remarqué que 75 % de ses ventes ont lieu le midi. Le quart des ventes du midi correspondent à la formule Burger, alors que 40 % des ventes du soir correspondent à la formule Wok.
Le gérant se constitue un fichier en notant, pour chaque vente, la formule choisie et le moment de cette vente (midi ou soir).
On prélève une fiche de façon équiprobable. On définit les quatre évènements suivants :

- M : « La fiche correspond à une vente du midi » ;
- S : « La fiche correspond à une vente du soir » ;
- W : « La fiche correspond à une formule Wok » ;
- B : « La fiche correspond à une formule Burger ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



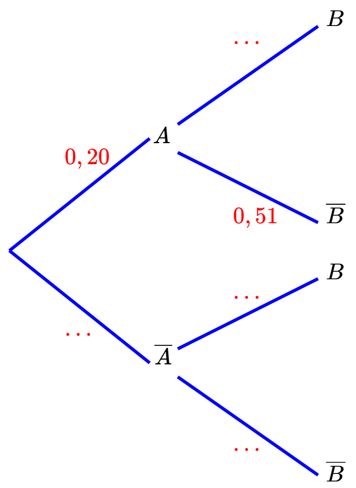
2. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap W$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Montrer que la probabilité que la fiche choisie corresponde à une formule Burger est égale à $0,337\,5$.
4. On a prélevé une fiche correspondant à la formule Burger. Quelle est la probabilité, à près, que la vente ait eu lieu le soir ?
5. Les évènements B et M sont-ils indépendants ?

Exercice 9

Dans une municipalité, une étude démographique affirme que les personnes de moins de 20 ans représentent 20 % de la population. Parmi ces personnes de moins de 20 ans, 51 % sont des hommes. Le pourcentage d'hommes de plus de 20 ans est de $40,8$ %.
On choisit au hasard un individu de cette population et on définit les évènements suivants :

- A : « L'individu a moins de 20 ans » ;
- B : « L'individu est une femme ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

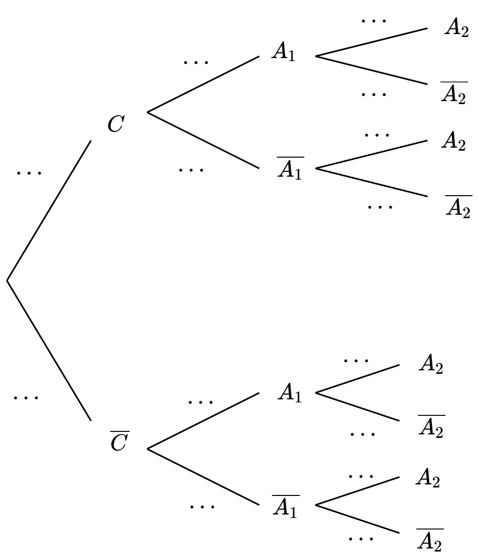
Exercice 10

Un avion est équipé d'un moteur central et de deux moteurs latéraux, un par aile. Chaque moteur peut tomber en panne de manière indépendante, et on estime que la probabilité que le moteur central tombe en panne est de $0,001$ et celle qu'un des deux autres moteurs tombe en panne est de $0,02$.
Ce trimoteur peut voler si le moteur central ou les deux moteurs d'ailes fonctionnent.
On considère les évènements suivants :

- C : « Le moteur central fonctionne » ;
- A_1 : « Le moteur de l'aile 1 fonctionne » ;
- A_2 : « Le moteur de l'aile 2 fonctionne ».

On modélise la situation à l'aide de l'arbre pondéré ci-dessous :

1. Compléter l'arbre de probabilités.



2. Déterminer la probabilité que le moteur central soit en panne et que les deux autres moteurs ne le soient pas.
3. Déterminer la probabilité que l'avion puisse voler.