TSTMG ∼ Fonction exponentielle de base a

Exercice 1

Écrire les nombres suivants sous la forme x^y, avec x et y des nombres réels.

$$a = \frac{2^t \times 2^1}{2^4} \qquad b = 3^{x+2} \times 3^{5-4x} \qquad c = \frac{5^{3x} \times 5^{8x-6}}{5^{6x-7}}$$

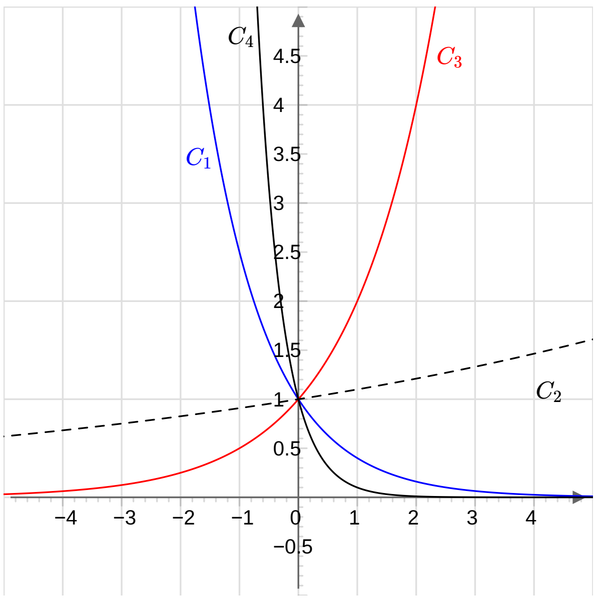
$$d = 3^{2x-2} \times 9 \qquad e = \frac{2^{2-8x}}{32} \qquad f = \frac{6^{5(x-3)} \times 36^x}{6^{2x-1} \times 6^{5x+3}}$$

Exercice 2

Soif f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

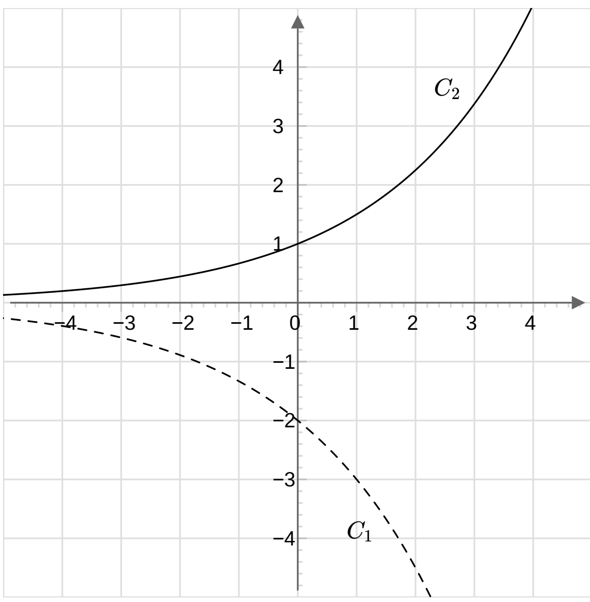
$$f_1(x) = 2^x,\ f_2(x) = 0,4^x,\ f_3(x) = 0,1^x \text{ et } f_4(x) = 1,1^x.$$

Déterminer dans le graphique ci-dessous la courbe associée à chacune de ces fonctions.

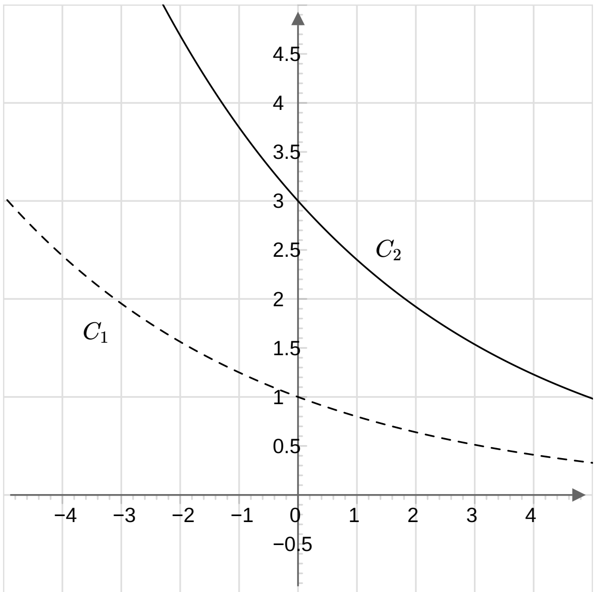


Exercice 3

1. Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,5^x$ et $g(x) = -2 \times 1,5^x$.
   Déterminer la courbe de chacune de ces fonctions dans le graphique ci-dessous.



2. Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,8^x$ et $g(x) = 3 \times 0,8^x$.
   Déterminer la courbe de chacune de ces fonctions dans le graphique ci-dessous.



Exercice 4

Dresser le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ pour chacune des fonctions ci-dessous.

$f(x) = 1,3^x$ $\qquad$ $g(x) = 0,99^x$ $\qquad$ $h(x) = 2 \times 0,8^x$

$\ell(x) = -3 \times 0,4^x$ $\qquad$ $m(t) = 3 \times 1,5^t$ $\qquad$ $n(t) = -3 \times 1,6^t$

Exercice 5

Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone présent dans les organismes vivants. Lorsqu’un organisme meurt la proportion de carbone 14 présent dans celui-ci diminue.
On considère un fragment d’os trouvé par des archéologues pour lequel on s'intéresse à la proportion en carbone 14 qu'il contient.
On sait que cette proportion évolue en fonction du temps t, exprimé en siècles, et suit la formule : $p(t) = (0,987\,6)^t$.
À la mort de l’organisme, on a : $p(0) = 1$.

1. Quelle sera la proportion de carbone 14, à près, dans ce fragment d’os au bout de 200 ans ?
2. Le sens de variations de la fonction p sur $[0\,;+\infty[$ est-il cohérent avec l'évolution de la proportion en carbone 14 dans un oraganisme mort ?
3. Montrer que pour tout nombre $t \geq 0$, $\dfrac{p(t+1)}{p(t)} = 0,987\,6$. Interpréter ce résultat.
4. Après combien d’années la proportion de carbone 14 sera-t-elle de 50 % ?
5. Ajouter une instruction à la fin de l'algorithme ci-dessous pour qu'il permette de répondre à la question précédente.

```
def p(t):
    return 0.9876**t

def seuil(prop):
    t = 0
    while p(t) > prop:
        t = t+1
    return t


```

Exercice 6

Chaque semaine, le réseau *Sentinelles* collecte auprès de ses médecins des informations permettant notamment d’estimer le nombre de cas de certaines maladies (grippe, varicelle, oreillons, etc.) sur une période donnée.
Ainsi, on a évalué, pendant 15 semaines, à partir de mi-novembre 2014, le nombre de personnes présentant des syndromes grippaux. La courbe ci-dessous donne l’évolution du taux d’incidence de la grippe (nombre de cas grippaux observés pour $100\,000$ habitants) pendant la période considérée.

Partie A - Première phase d'évolution

Pendant les 6 premières semaines d’observation, le taux d’incidence de la grippe est modélisé par la fonction f définie sur l’intervalle $[0\,;6]$ par : $f(t) = 24 \times 1,27^t$, où t est le nombre de semaines écoulées depuis le début de l’observation.

1. Calculer le taux d'incidence de la grippe au bout de la 1re semaine d'observation. Donner la valeur exacte de ce taux d'incidence.
2. Indiquer, en justifiant, le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;6]$.
3. Montrer que pour tout $t \in [0\,;6]$, $\dfrac{f(t+1)}{f(t)} = 1,27$. Interpréter ce résultat ?
4. Au bout de combien de semaines écoulées le taux d'incidence de la grippe dépassera-t-il le double du taux d'incidence observé au bout de la première semaine ?

Partie B - Deuxième phase d'évolution

Au-delà de la 6e semaine d'observation, on modélise le taux d'incidence par la fonction h définie surl'intervalle $]6\,;15]$ par :

$h(t) = -20t^2 + 480t - 2\,059,3$.

1. Déterminer à l'aide du graphique, au bout de combien de semaines écoulées le taux d'incidence dépasse 500 pour la première fois. (On laissera apparents les traits nécessaires à la lecture).
2. a. Déterminer $h'(t)$ où h' est la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $]6\,;15]$.
   b. Étudier le signe de $h'(t)$ en fonction de$t$ sur l'intervalle $]6\,;15]$.
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $]6\,;15]$.
3. Pendant la deuxième phase d'évolution, à quel moment le taux d'incidence de la grippe est-il le plus élevé ? Quelle valeur maximale atteint-il ?