TSTMG ~ Variables aléatoires discrètes finies - Loi binomiale

Exercice 1

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	$0,35$		$0,20$	$0,20$

1. Compléter le tableau.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Déterminer $P(X \leq 2)$ et $P(X > 3)$.

Exercice 2

Pour un jeu de grattage à 5 €, 15 millions de tickets peuvent être émis par la Française des Jeux. Les différents lots sont répartis ainsi :

Nombre de lots	3	3	5	10	1 000	3 000	12 500	375 002	1 772 496	1 500 000	11 235 981
Gain du lot en €	500 000	100 000	15 000	5 000	1 000	500	100	20	10	5	0

Tous les billets sont vendus.

1. Calculer la recette de la Française des Jeux.
2. Quelle est la somme totale redistribuée aux joueurs ?
3. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité de gagner le montant maximum et la probabilité de ne rien gagner.
4. On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.

Exercice 3

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $0,3$.
Calculer $E(X)$ et déterminer, à 10^{-3} près, à l'aide de la calculatrice :

$$P(X = 5)\,;\, P(X \leq 7)\,;\, P(X < 6)\,;\, P(X \geq 4)\,;\, P(X > 3) \text{ et } P(2 \leq X \leq 5).$$

Exercice 4

Un candidat passe un concours qui comporte un questionnaire à choix multiples noté sur 16. Ce Q.C.M a 8 questions indépendantes. Pour chaque question, il y a 4 réponses possibles dont une seule est correcte et le candidat répond au hasard. Chaque réponse juste rapporte 2 points.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de réponses exactes.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Quel est le nombre moyen de réponses exactes ?
3. À l'aide du triangle de Pascal, déterminer tous les coefficients binomiaux pour $n = 8$.
4. En utilisant les résultats précédents, calculer, à 10^{-6} près, les probabilités des évènements :
   - A : « Le candidat a 16 au Q.C.M » ;
   - B : « Le candidat a 0 au Q.C.M » ;
   - C : « Le candidat a 4 au Q.C.M. »

Exercice 5

Une usine fabrique en grande quantité des puces GPS pour la téléphonie mobile. On admet que 97 % des pièces produites sont conformes.
On note X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 80 pièces prises au hasard dans la production, associe le nombre de

pièces non conformes.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler tout échantillon de 80 pièces à un échantillon aléatoire prélevé avec remise.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Déterminer l'espérance de X. Interpréter le résultat.
3. Calculer, à 10^{-6} près, les probabilités des évènements suivants :
    - A : « on a exactement cinq pièces non conformes » ;
    - B : « on a au moins une pièce non conforme » ;
    - C : « on a aux plus trois pièces non conformes. »

Exercice 6

On considère le programme Python ci-dessous :

```python
from random import*
s = 0
for i in range(0,60):
    r = randint(1,10)
    if r == 10 :
        s = s + 1
print(s)
```

Quelle est la probabilité, à 10^{-3} près, que la valeur de la variable s à la fin du programme soit comprise entre 4 et 7 inclus ?

Exercice 7

Une compagnie aérienne dispose d'un avion de 574 places. Les comportements des passagers sont indépendants les uns des autres et la probabilité qu'un passager soit présent à l'embarquement est de $0,95$.

1. On suppose dans cette question que la compagnie a vendu exactement 574 places et on nomme X la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui embarquent parmi les 574 possibles.
    a. Quelle loi de probabilité suit X ? On précisera ses paramètres.
    b. Quelle est l'espérance de X ? Interpréter le résultat.
    c. La compagnie estime que les bénéfices sont satisfaisants s'il y a plus de 540 passagers sur un vol.
    Quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité que les bénéfices ne soient pas satisfaisants ?
2. Pour maximiser les bénéfices, la compagnie décide de vendre sur chaque vol 595 billets. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui embarquent parmi les 595 possibles.
   Déterminer le risque de surbooking, c'est-à-dire la probabilité qu'il y ait plus de passagers que de places disponibles.
   On donnera le résultat en pourcentage avec une décimale.

Exercice 8

Dans un aéroport, un groupe de 80 personnes s'apprêtent à passer un portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à $0,022$.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
3. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} de:
    - la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique;
    - la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.
4. Déterminer la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leq n) \geq 0,9$.

Exercice 9

Un représentant d'une marque d'automobiles démarche dix clients par jour. On suppose que chaque client lui commande une voiture neuve avec la probabilité de $\frac{1}{20}$. Il est également supposé que la décision d'un client n'a aucun impact sur celles des autres.
On note V la variable aléatoire modélisant le nombre de voitures vendues par ce représentant lors d'une journée.

1. Calculer la probabilité, pour le représentant, de vendre un jour choisi au hasard au mois de janvier :
    a. aucune voiture;
    b. exactement trois voitures.
2. Déterminer $P(V \geq 1)$ et interpréter le résultat.
3. Sachant que le représentant touche 200 euros de commission par voiture vendue, calculer la probabilité qu'il gagne au moins 400 euros dans une journée.
4. Combien de voitures, le représentant peut-il espérer vendre dans une journée ? Tous les résultats seront à arrondir à 10^{-3}.
5. Que représente le résultat affiché par cet algorithme pour le représentant ?

```
from random import*

def journee():
    nbVoitures = 0
    for i in range(0,10):
        a = randint(1,20)
        if a == 1:
            nbVoitures = nbVoitures+1
    return 200*nbVoitures

somme = 0
for i in range(0,31):
    somme = somme+journee()
print(somme)
```

6. Quelle caractéristique de la variable aléatoire V est estimée par l'algorithme suivant ?

```
from random import*

def journee():
    nbVoitures = 0
    for i in range(0,10):
        a = randint(1,20)
        if a == 1:
            nbVoitures = nbVoitures+1
    return 200*nbVoitures

somme = 0
for i in range(0,31):
    somme = somme+journee()
print(somme)/31
```