TSTMG ∼ Logarithme décimal

Exercice 1

Sachant que $\log(2) \simeq 0,301$, déterminer, sans calculatrice, une valeur approchée des nombres ci-dessous :

$a = \log(20)$ $\quad b = \log(2\,000)$ $\quad c = \log(0,2)$

$d = \log\left(\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad e = \log(0,02)$ $\quad f = \log\left(\dfrac{1\,000}{0,000\,2}\right)$

$g = \log(4)$ $\quad h = \log(8)$ $\quad i = \log(0,125)$

$j = \log(125)$ $\quad k = \log(1,6)$ $\quad \ell = \log\left(\dfrac{5}{3,2}\right)$

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

$4^x = 1\,000$ $\quad 0,8^t = 25$ $\quad 25 \times 1,01^x = 125$

$81 \times 0,05^t = 9$ $\quad 1,8^t \geq 100$ $\quad 0,4^x > 24$

$124 \times 0,3^x \leq 248$ $\quad -13 \times 0,4^x < 39$ $\quad -26 \times 1,1^t \geq 24$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite géométrie de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $1,01$.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
2. Déterminer, en justifiant, le premier entier n tel que $u_n \geq 1\,000$.

Exercice 4

On place, à intérêts composés, la somme de $10\,000$ € au taux de $1,8$ %.
Si on ne touche jamais à ce capital, déterminer à partir de combien d'années celui-ci aura triplé.

Exercice 5

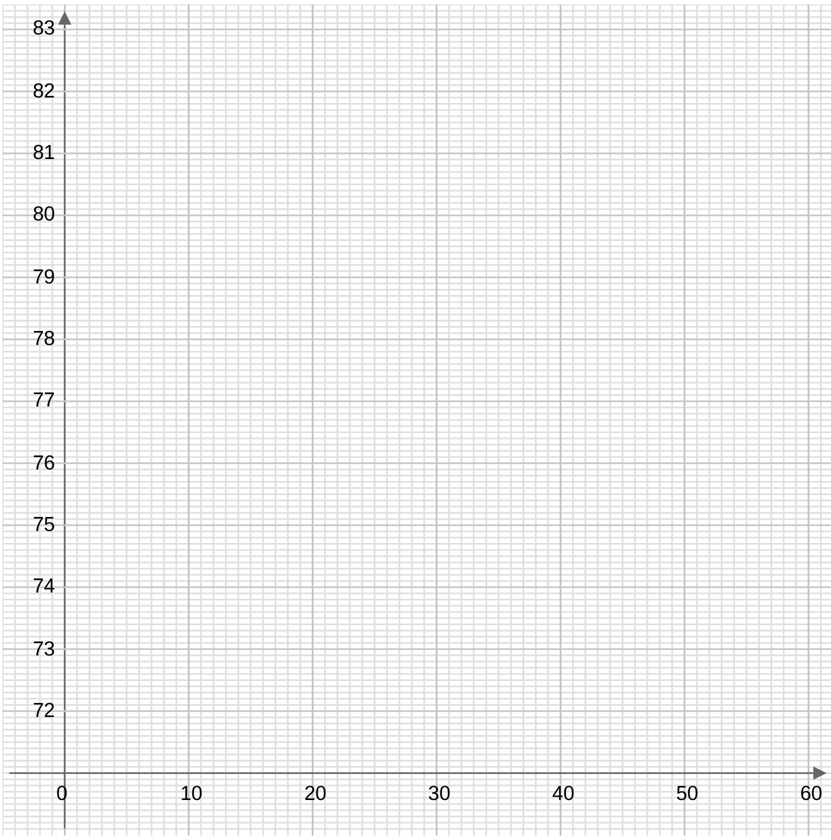
Un aquarium contenant initialement 200 litres d'eau voit son volume diminuer de 2 % chaque journée.
Au bout de combien de jours le volume de cet aquarium sera-t-il inférieur à 20 litres ?

Exercice 6

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population globale de l'Allemagne de 1958 à 2017.

Année	Rang de l'année x_i	Nombre d'habitants (en millions) y_i
1958	0	$71,5$
1963	5	$74,4$
1968	10	77
1975	17	$78,7$
1992	34	81
1998	40	$82,1$
2006	48	$82,3$
2010	52	$81,8$
2017	59	$82,8$

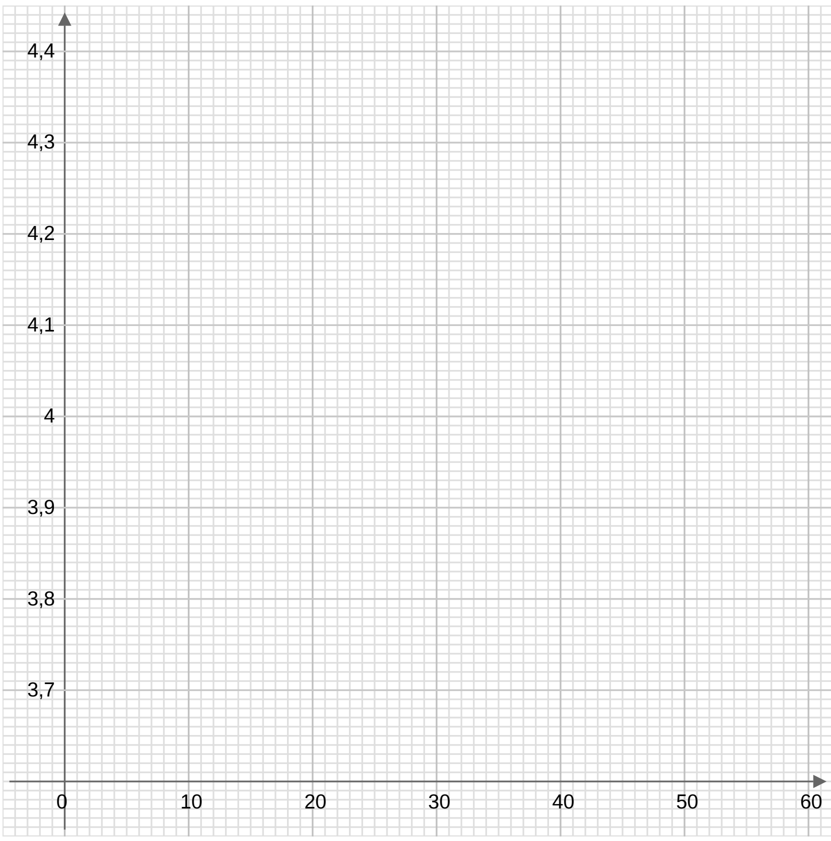
1. Construire le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;y_i)$ dans le repère ci-dessous.



2. Expliquer pourquoi un ajustement affine n'est pas envisageable ici.
3. Le nuage de points présente une forme logarithmique. On étudie alors le nuage de points $(x_i\,;z_i)$ avec $z_i = 10^{\frac{y_i-71,5}{10}}$.
   Compléter, en arrondissant à 10^{-3} , le tableau ci-dessous :

x_i	0	5	10	17	34	40	48	52	59
$z_i = 10^{\frac{y_i-71,5}{10}}$	1								

4. Construire le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;z_i)$ dans le repère ci-dessous.



5. Peut-on envisager un ajustement affine pour le nuage de points associés à la série $(x_i\,;z_i)$?

6. Donner, à 10^{-4} près, une équation de la droite d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés.
   On l'exprimera sous la forme $z = ax + b$.
   En déduire l'expression y du nombre d'habitants, en fonction du rang x des années.
7. Selon ce modèle, quelle était la population globale de l'Allemagne en 1985 ?
8. L'algorithme ci-dessous, après exécution, affiche 329. Comment interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice ?

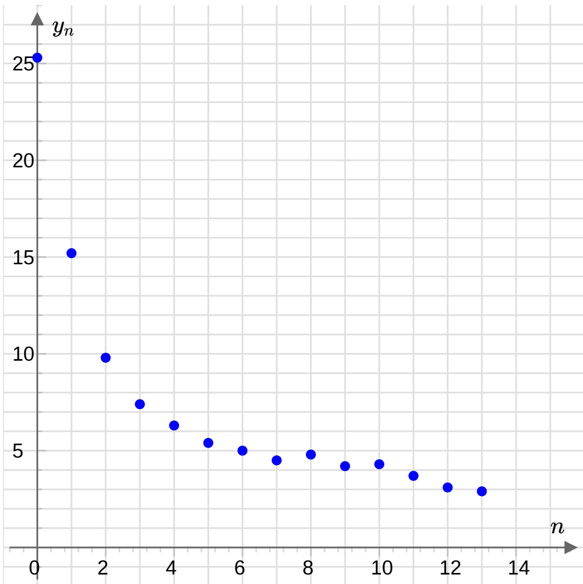
```
from math import*
def y(x):
    return 10*log10(0.2111*x+1.3820)+71.5
x = 59
while y(x) < 90:
    x = x +1
print(x)
```

Exercice 7

Une usine a décidé depuis 2005 de réduire sa production de déchets non recyclables. On note, dans le tableau ci-dessous, y n la production de déchet non recyclables de l'année 2005 + n, exprimée en tonnes, et on construit le nuage de points associé à la série $(n\,;y_n)$.

Années	n	y_n
2005	0	$25,3$
2006	1	$15,2$
2007	2	$9,8$
2008	3	$7,4$
2009	4	$6,3$
2010	5	$5,4$
2011	6	5

Années	n	y_n
2012	7	$4,5$
2013	8	$4,8$
2014	9	$4,2$
2015	10	$4,3$
2016	11	$3,7$
2017	12	$3,1$
2018	13	$2,9$



La forme du nuage n'étant pas allongée, on considère la série $(n\,;z_n)$ avec $z_n = \log(4y_n)$.

1. Justifier que l'on peut envisager un ajustement affine pour la série $(n\,;z_n)$.
   On arrondira les z_n , à 10^{-3} près.
2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine pour cette série obtenue par la méthode des moindres carrés. On l'exprimera sous la forme $z = an + b$, avec a et b arrondis à 10^{-3} près.
3. À partir de quelle année cette usine pourra, selon ce modèle, produire moins de deux tonnes de déchets non recyclables ?

Exercice 8

Des plaques d'isolation sonore permettent de diminuer le niveau sonore d'un certain pourcentage t inconnu. On place dans une pièce, contre les murs, cinq de ces plaques de telle sorte qu'un niveau sonore initial de 80 dB soit atténué jusqu'à 60 dB.
Déterminer, à 10^{-2} près, le pourcentage t de diminution du niveau sonore que permet d'obtenir une de ces plaques.

Exercice 9

Partie A

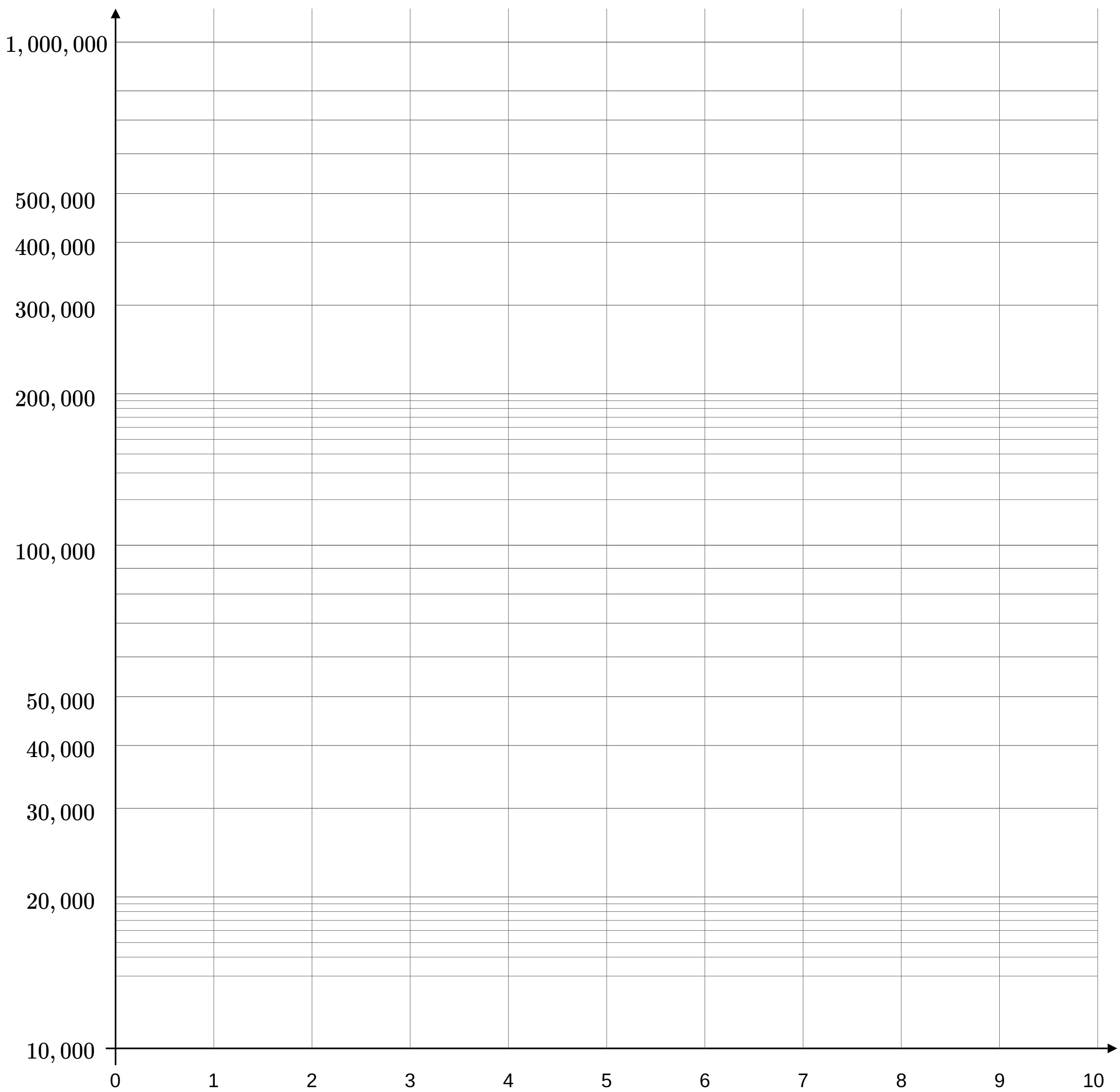
Une entreprise voit son chiffre d'affaires en très forte progression. Elle prévoit, pour les 8 prochaines années, un taux de croissance de 40 % par an. En 2020, son chiffre d'affaires A_0 était de $50\,000$ €. Soit A_n son chiffre d'affaires l'année 2020 $+n$.

1. Calculer A_1 et A_2 puis donner le chiffre d'affaire de l'année 2025.
2. Que peut-on dire de la suite (A_n) ? En déduire A_n en fonction de n.
3. Compléter le tableau ci-dessous et démontrer que les points de coordonnées $(n\,;\log(A_n))$ sont sur une droite D dont on donnera une équation.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\log(A_n)$									

Partie B : Représentation graphique

1. Placer sur la feuille de papier semi-logarithmique ci-dessous les points $P_0(0\,;A_0)$, $P_1(1\,;A_1)$ et $P_2(2\,;A_2)$.

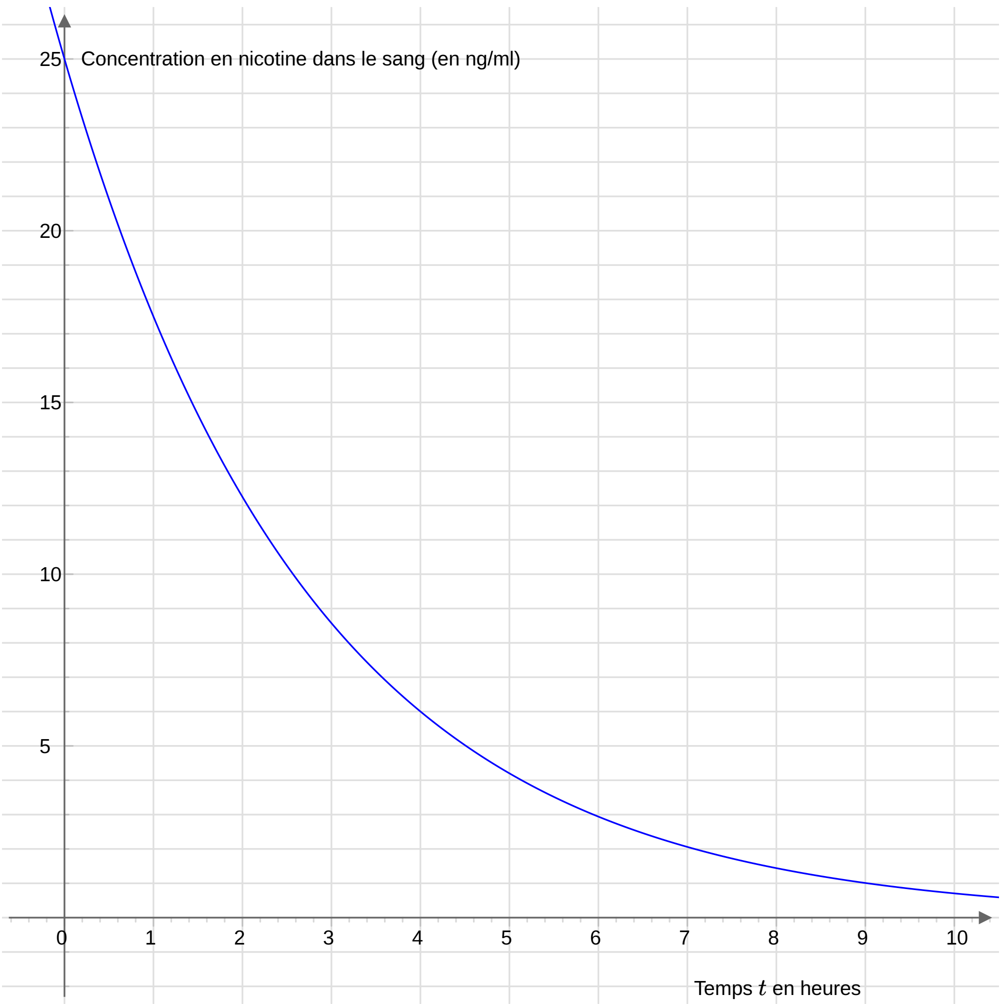


2. a. Vérifier que les points P_0 , P_1 et P_2 sont alignés et prolonger la droite D obtenue.
   b. Placer sur la droite D sans calculs les points $P_3, P_4, \ldots, P_8$.
3. a. Déterminer graphiquement le chiffre d'affaires prévisible en 2023.
   Vérifier le résultat par le calcul.
   b. Déterminer l'année où le chiffre d'affaires sera à peu près de $190\,000$ €.

Exercice 10

Bien qu'il soit fortement déconseillé de fumer pendant l'allaitement, certaines femmes continuent de le faire. Il convient alors de respecter des mesures de précaution pour minimiser l'exposition de l'enfant à la nicotine.
On s'est intéressé à la concentration de nicotine dans le sang d'une patiente au cours du temps après qu'elle a fumé une cigarette. Elle ne fumera plus pendant toute la durée du test.
On note $f(t)$ la concentration de nicotine dans le sang de la patiente en nanogramme par millilitre (ng/ml) à l'instant t (en heures).
L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où la concentration est maximale (pic sanguin atteint très rapidement).
On admet que $f(t) = 25 \times 0,7^t$, pour $t \in [0\,;10]$.

1. Déterminer, en le justifiant, le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$.
2. Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$.
3. La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan est donnée ci-dessous :



   a. Déterminer graphiquement la concentration de nicotine dans le sang de la patiente au bout d'une heure et demie. On laissera les traits de construction.
   b. Déterminer graphiquement au bout de combien de temps la concentration de nicotine dans le sang a quasiment disparu, c'est-à-dire quand elle devient inférieure ou égale à 1 ng/ml.
4. a. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;10]$ l'inéquation : $f(t) \leqslant 12,5$.
   b. On conseille aux femmes qui fument d'attendre que la moitié de la nicotine présente dans leur sang ait été éliminée avant d'allaiter leur enfant. Combien de temps, à l'heure près, la patiente devra attendre avant de pouvoir allaiter son enfant ?

Exercice 11

Deux villes A et B comptent respectivement $6\,000$ et $3\,000$ habitants au 1 er janvier 2020. La 1$^{\text{re}}$ prévoit une diminution annuelle de 8 % de ses habitants pour les années à venir, tandis que la 2$^{\text{e}}$ prévoit, elle, une hausse annuelle de 10 %.

1. a. Déterminer le nombre d'habitants des deux villes au 1 er janvier 2021, puis au 1 er janvier 2022.

b. Déterminer les nombres d'habitants des villes A et B 10 ans après.

2. On considère les fonctions f et g définies sur $[0\,;8]$ par : $f(x) = 6\,000 \times (0,92)^x$ et $g(x) = 3\,000 \times (1,10)^x$ qui représentent les populations des villes A et B avec x le nombre d'années à partir de 2020.
   a. Donner le sens de variation des fonctions f et g.
   b. Tracer, à l'aide d'une calculatrice, les courbes représentatives $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ des fonctions f et g.
3. Utiliser le graphique précédent pour déterminer à partir de quelle année :
   a. La population de la ville A sera inférieure à $3\,000$ habitants ;
   b. La population de la ville A sera inférieure à celle de la ville B.
4. L'algorithme ci-dessous affiche après exécution 3.88. Interpréter, en justifiant, ce résultat par rapport au nombre d'habitants des deux villes.

```
def f(x):
    return 6000*0.92**x
def g(x):
    return 3000*1.1**x
x = 3
while f(x) > g(x):
    x = x + 0.01
print(x)
```

5. a. Résoudre l'équation $f(x) = 1500$. Interpréter le résultat.
   b. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Interpréter le résultat.
6. Le maire de la ville B affirme que le nombre d'habitants de sa ville dépassera celui de la ville A en septembre 2023. A-t-il raison ?