Équations de droites

Fonctions affines

Définition

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine lorsqu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
Les nombres a et b sont respectivement appelés le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de f.

Sens de variation

• Si le coefficient directeur a est strictement positif la fonction affine est strictement croissante.
• Si le coefficient directeur a est strictement négatif la fonction affine est strictement décroissante.
• Si le coefficient directeur a est nul la fonction affine est constante.

Tableau de signes

• Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

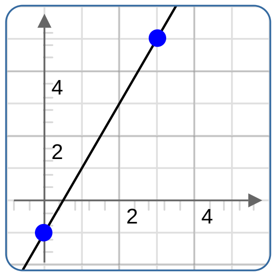
• Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Représenter une droite

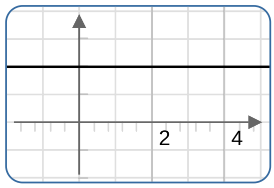
Équation de la forme $y = ax + b$

Ex : Représenter dans un repère du plan la droite d'équation $y = 2x - 1$.
Sol : On détermine les coordonnées de deux points :
Pour $x = 0$, on a
$y = 2 \times 0 - 1 = -1$.
Pour $x = 3$, on a
$y = 2 \times 3 - 1 = 5$.



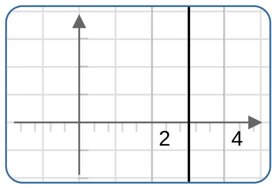
Équation de la forme $y = c$

Ex : Représenter dans un repère du plan la droite d'équation $y = 2$.
Sol : La droite est ici horizontale.



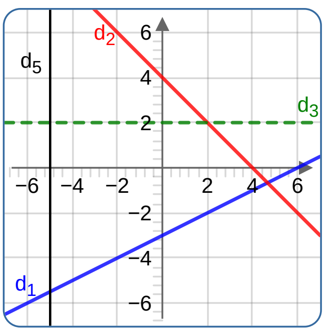
Équation de la forme $x = c$

Ex : Représenter dans un repère du plan la droite d'équation $x = 3$.
Sol : La droite est ici verticale.



Déterminer une équation (1)

Ex : Dans le repère ci-dessous déterminer une équation pour chacune des droites tracées.



Sol :
$d_1 : y = \frac{1}{2}x - 3$
$d_2 : y = -x + 4$
$d_3 : y = 2$
$d_4 : x = -5$

Déterminer une équation (2)

Ex : Déterminer une équation de la droite (AB) avec $A(-1\,;2)$ et $B(3\,;0)$.
Sol : La droite (AB) n'est pas verticale donc son équation réduite est de la forme : $y = ax + b$, avec a et b deux réels à déterminer.
On a : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-2}{3-(-1)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

L'équation est de la forme : $y = -\dfrac{1}{2}x + b$. On remplace alors y par y_B puis x par x_B et on obtient :

$y_B = -\dfrac{1}{2}x_B + b$ soit $0 = -\dfrac{1}{2} \times 3 + b$.

Ainsi $b = \dfrac{3}{2}$.

L'équation réduite de (AB) est : $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

✎ Intersections ✎

Ex : Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre les droites d_1 et d_2 d'équation respective $y = 2x + 3$ et $y = -x + 5$.
Sol : On résout pour cela le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x+3 \\ y & = & -x+5 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x+3 \\ 2x+3 & = & -x+5 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x+3 \\ 2x+x & = & 5-3 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x+3 \\ 3x & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x+3 \\ x & = & \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2 \times \dfrac{2}{3} + 3 \\ x & = & \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{2}{3} \\ y & = & \dfrac{13}{3} \end{array}\right.$$

Le point d'intersection des droites d_1 et d_2 a donc pour coordonnées : $\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{13}{3}\right)$.

✎ Positions relatives ✎

Ex : Déterminer la position relative des droites d_1 et d_2 d'équation respective $y = -x - 3$ et $y = 3x + 5$.
Sol : On résout pour cela l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} -x-3 &\leq 3x+5 \\ -x-3x &\leq 5+3 \\ -4x &\leq 8 \\ x &\geq \frac{8}{-4} \quad \text{(on change le sens car -4 < 0)} \\ x &\geq -2. \end{aligned}$$

Ainsi :
• sur $]-\infty\,;-2]$ la droite d_1 est en-dessous de d_2,
• sur $[-2\ +\infty[$ la droite d_1 est au-dessus de d_2.

On peut le vérifier sur le graphique ci-dessous :