Suites

✎ Calculer un terme ✎

Suite définie par une formule explicite

Ex : Soit (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 45 \times (0,6)^n$. Caculer u_8.

Sol : On remplace n par 8 dans la formule.

$u_8 = 45 \times (0,6)^8 \simeq 0,756$.

Suite définie par récurrence

Ex : Soit (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = 0,1u_n + 1$. Calculer u_1, u_2 et u_3

Sol :

$u_1 = 0,1u_0 + 1 = 0,1 \times 5 + 1 = 1,5$.

$u_2 = 0,1u_1 + 1 = 0,1 \times 1,5 + 1 = 1,15$.

$u_3 = 0,1u_2 + 1 = 0,1 \times 1,15 + 1 = 1,115$.

✎ Sens de variation ✎

Définition

• Une suite (u_n) est croissante si pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

• Une suite (u_n) est décroissante si pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Application

Ex : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = 10n + 3$. Déterminer son sens de variation.

Sol :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 10(n+1) + 3 - (10n+3) \\ &= 10n + 10 + 3 - 10n - 3 \\ &= 10 > 0. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est strictement croissante.

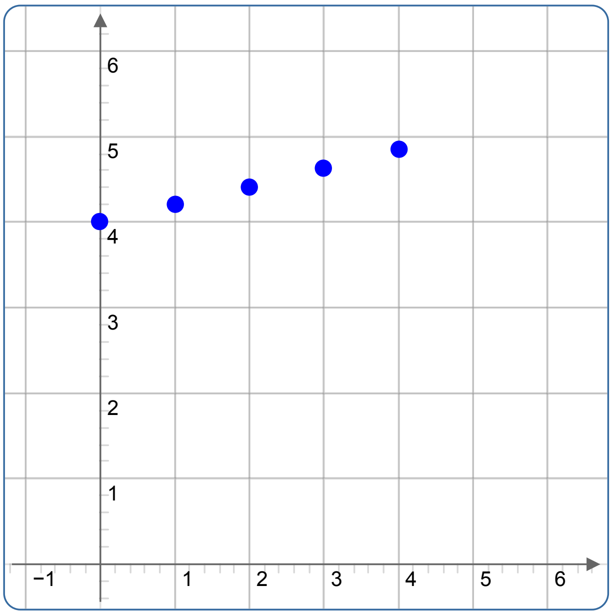
✎ Nuage de points ✎

Ex : Construire le nuage de points associé au 5 premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 1,05u_n$.

Sol : On calcule tout d'abord u_1, u_2, u_3 et u_4.

$u_1 = 1,05 \times 4 = 4,2$; $u_2 = 4,41$; $u_3 \simeq 4,63$; $u_4 \simeq 4,86$.

Dans un repère on place ensuite les points de coordoonées $(0;\ u_0)$, $(1;\ u_1)$, $(2;\ u_2)$, $(3;\ u_3)$ et $(4;\ u_4)$.



✎ Suites arithmétiques ✎

Définition

Une suite est dite arithmétique si chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre appelé raison (noté r en général).

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Sens de variation

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

• Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante.

• Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.

• Si $r = 0$ alors (u_n) est constante.

Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Pour tout entier n :

$$u_n = u_0 + nr$$

ou encore

$$u_n = u_1 + (n-1)r.$$

Somme de termes consécutifs

La somme S de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

✏ Suites géométriques ✏

Définition

Une suite est dite géométrique si chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre appelé raison (noté q en général) : $u_{n+1} = u_n \times q$.

Sens de variation

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$.

• Si $q > 1$ alors (u_n) est strictement croissante.
• Si $0 \leq q < 1$ alors (u_n) est strictement décroissante.
• Si $q = 1$ alors (u_n) est constante.

Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Pour tout entier n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

ou encore

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}.$$

Somme de termes consécutifs

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est donnée par :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

⌨ Algorithmes ⌨

Calculer un terme

Ex : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 250$ et $u_{n+1} = 0,9u_n + 10$. L'algorithme ci-dessous permet de calculer et d'afficher u_8 et u_{10}.

```
def u(n):
    u = 250
    for i in range(1,n+1):
        u = 0.9*u+10
    return u

print( u(8) )
print( u(10) )
```

Déterminer le premier terme vérifiant une condition

Ex : Soit (u_n) la suite définie par $v_0 = 100$ et $v_{n+1} = 1,05v_n + 25$. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer le premier terme de la suite supérieur ou égal à $5\,000$ et affiche son rang.

```
v = 100
while v < 5000:
    n = n+1
    v = 1.05*v+25

print(n)
```

✏ Suites arithmético-géométriques ✏

Ex : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 3u_n + 2$. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
2. Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de n.

Sol :

1. Pour tout entier n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= 3u_n + 2 + 1 \\ &= 3u_n + 3 \\ &= 3(u_n + 1) \\ &= 3v_n . \end{aligned}$$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison 3.

2. $v_0 = u_0 + 1 = 2 + 1 = 3$.
   On a alors :
   $v_n = v_0 \times 3^n$ et donc $v_n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$.
   De plus :
   $v_n = u_n + 1$ donc $u_n = v_n - 1$.
   Ainsi : $u_n = 3^{n+1} + 1$.