✎ Variable aléatoire ✎

Définition

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.

• On appelle variable aléatoire X toute fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs prises par X.
On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la fonction qui à chaque x_i associe le nombre $P(X = x_i)$.
On peut résumer cela dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

On a : $\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = 1$.

Espérance

Soit n un entier naturel non nul.
Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_i, pour $0 \leq i \leq n$, et soient $p_i \in [0; 1]$ les probabilités associées à ces événements.
L'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est la moyenne des valeurs x_i pondérées par leurs probabilités x_i.

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots x_n \times p_n$$

ou encore

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i \times p_i.$$

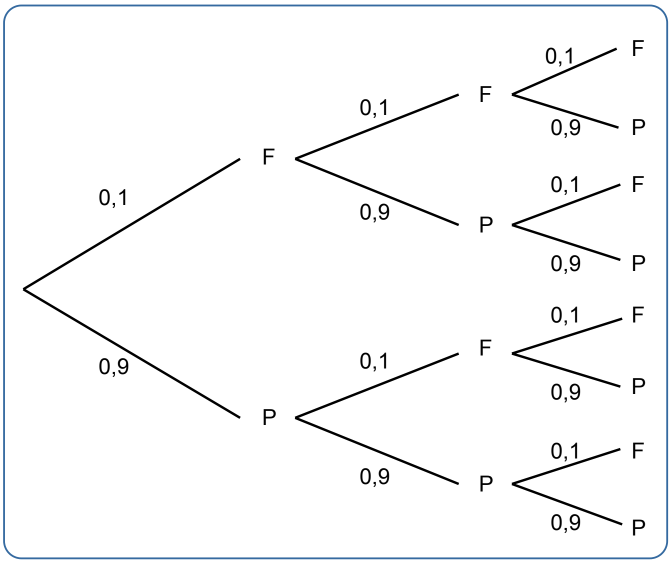
On retrouve la moyenne pondérée du tableau de la définition précédente.

Épreuve de Bernoulli

Soit p un nombre réel de l'intervalle $[0; 1]$.
Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles, l'une appelée "succès", et a pour probabilité p, et l'autre appelée "échec" et a pour probabilité $1 - p$.

✎ Évènements $\{X = a\}, \{X \leq a\}$ ✎

Ex : Une pièce de monnaie déséquilibrée est telle que la probabilité d'obtenir pile vaut $P(F) = 0,1$. On la lance trois fois et on s'intéresse à la variable aléatoire X qui compte le nombre de piles obtenu.
1- Construire un arbre de probabilité illustrant la situation.
2- Dresser un tableau donnant la loi de probabilité de X.
3- Donner l'espérance de X.
4- Déterminer $P(X \leq 1)$ et $P(X > 1)$.
Sol : 1-



2- $P(X = 0) = 0,9 \times 0,9 \times 0,9 = 0,729$.
$P(X = 1) = 0,1 \times 0,9^2 + 0,9 \times 0,1 \times 0,9 + 0,9^2 \times 0,1 = 0,243$.
$P(X = 2) = 3 \times 0,1^2 \times 0,9 = 0,027$.
$P(X = 3) = 0,1^3 = 0,001$.

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	$0,729$	$0,243$	$0,027$	$0,001$

3-
$E(X) = 0 \times 0,729 + 1 \times 0,243 + 2 \times 0,027 + 3 \times 0,01 = 0,3$.
4-

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= 0,729 + 0,243 = 0,972. \\ &= 0,972. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0,027 + 0,001 \\ &= 0,028 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - 0,972 \\ &= 0,028 \end{aligned}$$