Terminale ~ Spécialité mathématique
Livret de révision

1 Suites numériques

Exercice 1 ★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par : $u_{n+1} = 20 + 0,5u_n$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier n : $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.
2. Déterminer alors le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que sa limite lorsque n ted vers $+\infty$.
3. Déterminer le premier entier n tel que $u_n > 38$.

Exercice 2 ★★

Le directeur d'une réserve marine a recensé $3\,000$ cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à $2\,000$.
Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3\,000$.

1. Justifier que $u_1 = 2\,926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2554

   Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1\,520$. On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.
5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1\,520$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,95$ dont on précisera le premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1\,520$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. Compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur strictement à $2\,000$.

```
n = 0
u = 3000
while ...
    n = ...
    u = ...
```

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

Exercice 3 ★★

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à $12\,000$ individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les $60\,000$ individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5% par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016+n$. On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$

   a. Justifier que g est croissante sur $[0;60]$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.
2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 55$.
   c. En déduire la convergence de la suite (u_n).
   d. Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$.
   En déduire la valeur de ℓ et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les $50\,000$ individus avec ce second modèle.
   Il utilise l'algorithme incomplet suivant.

```
n = 0
u = 12
while ...
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

   Compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.

Exercice 4 ★★★

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses $5\,000$ collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020.

Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel $n,\ a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. \item On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par: $v_n = a_n - 3\,000$.
    a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
    b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
    c. En déduire que, pour tout entier naturel $n,\ a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à $2\,500$, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

    $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

    b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que pour tout entier naturel n,

    $$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

    En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

2 Fonctions

Exercice 5 ★★

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
    a. Déterminer, pour tout $x \geq 1$ l'expression de $g'(x)$.
    b. Dresser le tableau de variation de g sur $[1; +\infty[$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur cet intervalle.
2. a. Montrer que pour tout $x \geq 1,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
    b. En déduire les variations de f sur $[1; +\infty[$.
    c. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
    d. La courbe $\mathcal{C}$ possède-t-elle une asymptote horizontale et/ou verticale ? Justifier votre réponse.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α sur $[1;+\infty[$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2}.
   b. En utilisant le fait que $f(\alpha)=2$, montrer que $\ln(\alpha)=\alpha^2-2\alpha$.

Partie B

On donne en annexe un repère dans lequel est tracée la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f.

1. Construire dans le repère de l'annexe la droite Δ d'équation $y=x$.
2. Soit M_2 le point d'abscisse 2 de $\mathcal{C}$ et N_2 celui d'abscisse 2 de Δ.
   Placer ces points dans le repère de l'annexe et donner la valeur exacte de la distance M_2N_2.
3. Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathcal{C}$ et Δ.
   a. Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k=\dfrac{\ln(k)}{k}$.
   b. Peut-on affirmer que pour k assez grand, la distance M_kN_k est proche 0 ?
   c. Après exécution de l'algorithme ci-dessous la variable k vaut $1\,416\,361$ (le temps d'exécution peut être un peu long). Comment interpréter cette valeur ?

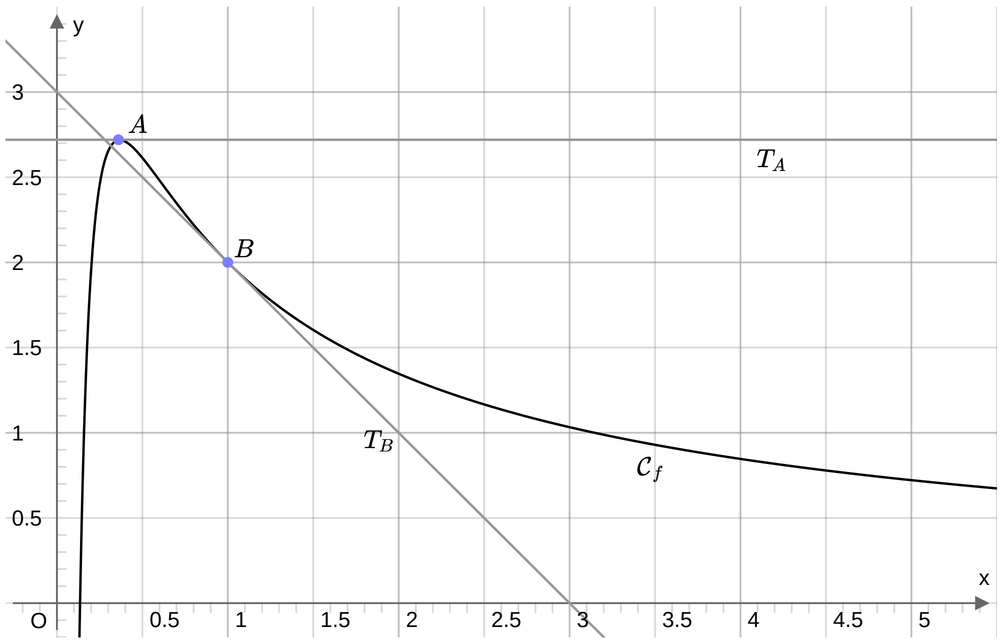
```python
from math import*
d = log(2)/2
k = 2

while d > 0.00001:
    k = k + 1
    d = log(k)/k
print(k)
```

Exercice 6 ★★

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$;
- la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\mathrm{e}\right)$;
- la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

Partie I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie II
On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f. On admet que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3}$.
   Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.
6. Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2(x) + 2\ln(x)$.
   a. Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
   b. Peut-on affirmer que F est concave sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$?
   c. Déterminer la primitive de f qui s'annule en e.

Exercice 7 ★★★

Partie A : établir une inégalité
Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $\ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite
On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 1$.
   c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.
4. a. Écrire un algorithme Python qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.
   b. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}.

Exercice 8 ★

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et f' la fonction dérivée de f.

1. a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$.
   b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.
   b. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.
3. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.
4. L'objectif de cette question est de déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.
   À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu, pour tout réel x, l'expression et le signe de $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f.

	Instruction	**Réponse**
1	f(x)=x*exp(-x)+1	$x\mathrm{e}^{-x}+1$
2	g(x)=Dériver(Dériver(f(x)))	$\mathrm{e}^{-x}(x-2)$
3	Résoudre(g(x) >= 0)	$x \geq 2$

   a. Déterminer le sens de variation de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction est convexe puis celui sur lequel elle est concave.
   c. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2]$.
5. On souhaite maintenant déterminer la primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
   On admet qu'il existe a, b et c tels que pour tout réel x, $F(x) = \mathrm{e}^{-x}(ax+b) + cx + d$.
   a. Déterminer l'expression de $F'(x)$ en fonction de a, b et c.
   b. Justifier alors que $a = b = -1$ et $c = 1$.
   c. En déduire la valeur de d et donner l'expression algébrique de $F(x)$.
   d. La courbe $\mathcal{C}_F$ représentative de F admet-elle une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?
   Justifier la réponse.

Exercice 9 ★★

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;4]$ par :

$$f(x) = (3x-4)\mathrm{e}^{-x} + 2.$$

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, $f'(x) = (7-3x)\mathrm{e}^{-x}$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.
3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.
   b. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il permette d'obtenir un encadrement à 10^{-4} de α. Donner cet encadrement.

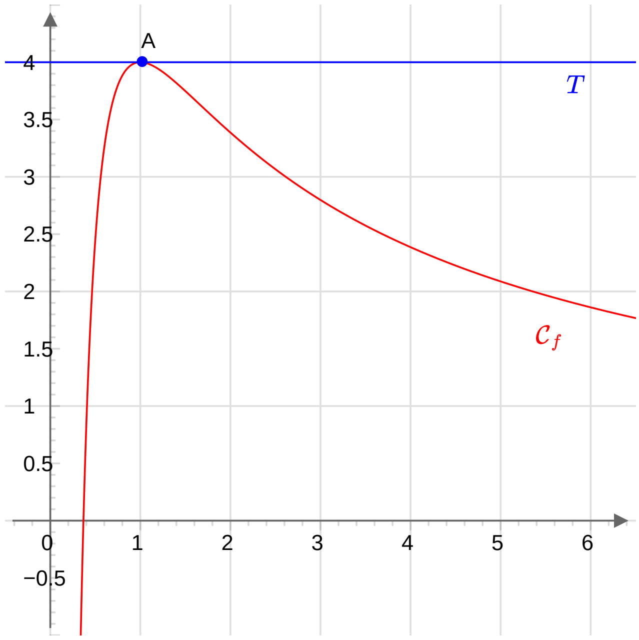
```
from math import*
def f(x):
    return (3*x-4)*exp(-x)+2

x = 0
while f(x) < 0:
    x = x+...
print(...)
```

4. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$ par $f''(x) = (3x-10)\mathrm{e}^{-x}$.
   a. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
   b. Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

Exercice 10 — 5 points

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point $A(1\,;4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

   On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ par:
   $$f(x)=\frac{a+b\ln x}{x}\quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$
2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :
   $$f'(x)=\frac{b-a-b\,\ln x}{x^2}.$$
3. En déduire les valeurs des réels a et b.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par:
   $$f(x)=\frac{4+4\ln x}{x}.$$
4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :
   $$f''(x)=\frac{-4+8\ln x}{x^3}.$$
7. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

Exercice 11 — ★★★

Une entreprise fabrique un composant électronique de haute technologie. Sa production hebdomadaire maximale est de 80 pièces.

Pour une production $x\in[0\,;80]$, on note $C_T(x)$ le coût total de production et $C_m(x)$ le coût marginal de production.

On rappelle que $C_m(x)$ représente le coût de production du $x+1$ ème composant et on admet que $C_m(x)=C_T'(x)$.

Le prix unitaire d'un de ces composants est de $6\,500$ euros et on estime que tous les composants produits sont vendus. On note de plus $R(x)$ la recette associée à la vente de tous les composants. Les coûts et la recette sont exprimés en centaines d'euros.

Une étude a montré que pour tout $x \in [0\,;80]$, on a $C_m(x) = x + \dfrac{100}{0,1x+1}$ et $C_T(0) = 30$.

1. Déterminer les variations du coût total C_T sur $[0\,;80]$.
2. a. Montrer que l'équation réduite de la tangente en 0 à la courbe représentative de C_T dans un repère orthonormé du plan est $y = 100x + 30$
   b. En déduire que le coût total de production pour un seul composant produit est proche de $13\,000$ euros.
3. Soit f la fonction définie sur $[0\,;80]$ par $f(x) = \dfrac{1}{0,1x+1}$.
   a. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = 10\ln(0,1x+1)$ est une primitive de f sur $[0\,;80]$.
   b. En déduire, pour tout $x \in [0\,;80]$, l'expression de $C_T(x)$.
4. a. En notant $B(x)$ le bénéfice associée à une production de x composants, justifier que
   $B(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 65x - 1\,000\ln(0,1x+1) - 30.$
   b. On rappelle qu'en langage Python la fonction $\ln$ est notée $\log$.
   L'algorithme ci-dessous affiche 48. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```python
from math import*
def B(x):
    return -0.5*x**2+65*x-1000*log(0.1*x+1)-30
max = B(0)
xmax = 0
for i in range(1,81):
    if B(i) > max:
        max = B(i)
        xmax = i
print(xmax)
```

   c. Montrer que pour tout $x \in [0\,;80]$, $B'(x) = \dfrac{-x^2+55x-350}{x+10}$.
   d. Dresser le tableau de variations de $B(x)$ sur $[0\,;80]$.
   e. Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ?

3 Probabilités

Exercice 12 ★

On s'intéresse à la clientèle d'un musée.
Chaque visiteur peut acheter son billet sur internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée.
Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée. Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur internet. Une étude est réalisée. Elle révèle que:

• 70 % des clients achètent leur billet sur internet;
• parmi les clients achetant leur billet sur internet, 35 % choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide ;
• parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55 % choisissent une visite avec un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée. On considère les évènements suivants :

• A : "Le client choisit une visite avec un audioguide ";
• B : "Le client achète son billet sur internet avant sa visite".

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le client choisisse une visite avec un audioguide est égale à $0,41$.
3. On s'intéresse aux clients qui visitent le musée avec un audioguide.
   Si plus de la moitié d'entre eux ont acheté leur billet sur internet alors le directeur proposera à l'avenir la location de l'audioguide sur le site internet du musée.
   D'après les résultats de cette étude, que va décider le directeur? Justifier la réponse.
4. On observe un échantillon de 50 visiteurs. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de visiteurs ayant choisi une visite avec audioguide dans cet échantillon.
   a. Quelle loi de probabilité suit la variable X ?

b. Déterminer $E(X)$ l'espérance de X.
c. Déterminer $P(X \geq 25)$.

Exercice 13 ★★

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement " le joueur gagne la n-ième partie " ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

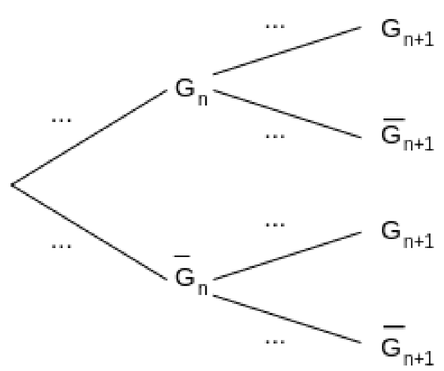
On a donc $p_1 = 0,1$.

Partie A - Les premières parties

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

Partie B - Un grand nombre de parties

1. Compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_n = p_n - \frac{3}{4}$.

   a. Déterminer la nature de la suite (u_n) et en déduire que pour tout entier n : $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

   b. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14 ★★

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation avec conduite accompagnée ;
- la formation traditionnelle.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec conduite accompagnée; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.

- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation traditionnelle; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.
On considère les événements suivants :
A : «la personne a suivi une formation avec conduite accompagnée» ;
R_1 : «la personne a réussi l'examen à la première présentation» ;
R_2 : «la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation» ;
R_3 : «la personne a réussi l'examen à la troisième présentation».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
   Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.
2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec conduite accompagnée et réussi l'examen à sa deuxième présentation.
   b. Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.
   c. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec conduite accompagnée ?
3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite. Ainsi, $\{X = 1\}$ correspond à l'événement R_1.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.
   On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.
   a. Dans le contexte de cette question, préciser un événement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
   On considère la fonction Python *seuil* ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.

```python
def seuil(p):
    n = 1
    while 1-(5.0/6)**n <= p:
        n = n+1
    return n
```

   b. Quelle est la valeur renvoyée par la commande *seuil(0.9)* ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 15 ★★

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs : rouge, vert, bleu. Tous les secteurs sont équiprobables, quel que soit le lancé.
Un joueur lance la roue.

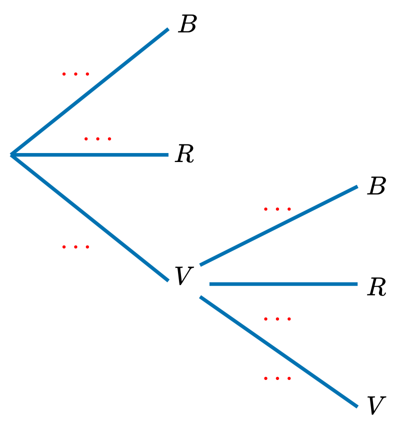
- Si le bleu sort, il perd 3 euro.
- Si le rouge sort il gagne 6 euro.
- Si il tombe sur du vert il relance la roue et :
  - si le vert sort il ne gagne rien.
  - si le rouge sort il gagne 1 euro.
  - si le bleu sort il perd 2 euro.

On note :

- V l'évènement : « le joueur tombe sur le secteur vert »,
- R l'évènement : « le joueur tombe sur le secteur rouge »,
- B l'évènement : « le joueur tombe sur le secteur bleu ».

Partie A
la roue se compose de 12 secteurs : 3 rouges, 5 verts et 4 bleus.

1. a. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous pour qu'il représente l'expérience aléatoire.



b. Calculer la probabilité d'obtenir, à la fin du jeu, un secteur bleu.

2. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.
   a. Calculer $P(X=-3)$ et $P(X=-2)$.
   b. Donner la loi de probabilité de X.
   c. Est-il intéressant de jouer à ce jeu ?

Partie B

La roue se compose maintenant de 3 secteurs rouges, 4 secteurs bleus et n secteurs verts, n étant un entier naturel non nul.
Soit X_n la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

1. Montrer que pour tout entier n, $E(X_n)>0$?
2. Le gérant de la loterie décide de rendre payant la participation à son jeu.
   Pour une participation de 2 euros, existe-t-il une valeur de n pour laquelle le gain moyen du gérant soit inférieur à $0,30$ euros par partie ?

Exercice 16 ★★

Partie A

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de $0,05$.
On possède un test de dépistage de cette maladie.
On considère un échantillon de n personnes ($n \geqslant 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.
On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange.
Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.
Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Montrer X_n prend les valeurs 1 et $(n+1)$.
2. Prouver que $P\left(X_n=1\right)=0,95^n$.
   Établir la loi de X_n en recopiant sur la copie et en complétant le tableau suivant:

x_i	1	$n+1$
$P\left(X_n=x_i\right)$		

3. Que représente l'espérance de X_n dans le cadre de l'expérience ?
   Montrer que $E\left(X_n\right)=n+1-n\times 0,95^n$.

Partie B

1. On considère la fonction f définie sur $[20\ ;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)+x\ln(0,95)$.
   Montrer que f est décroissante sur $[20\ ;+\infty[$.

2. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[20 ; +\infty[$.

   Donner un encadrement à $0,1$ près de cette solution.
4. En déduire le signe de f sur $[20 ; +\infty[$.

Partie C
On cherche à comparer deux types de dépistages.
La première méthode est décrite dans la partie A, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus.
La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$.

En utilisant la partie B, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

4 Géométrie dans l'espace

Exercice 17 ★★

Soit d la droite dont une paramétrisation est :

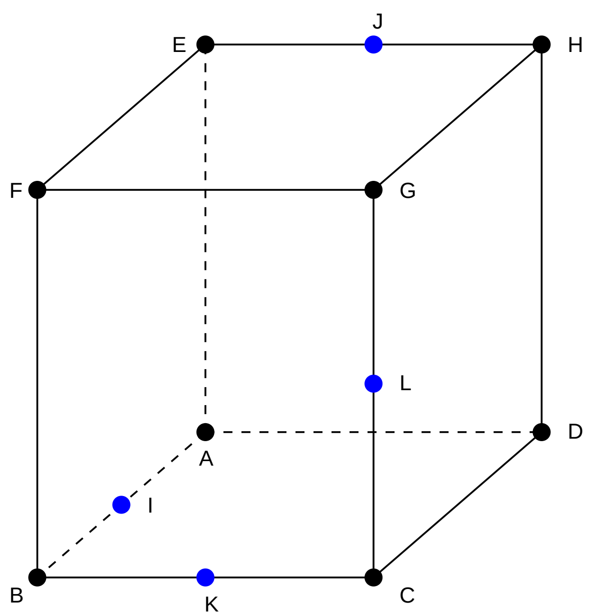
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-2t \\ y & = & 3t \\ z & = & -3+t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$

1. Donner les coordonnées de deux points appartenant à d.
2. Donner les coordonnées de deux vecteurs directeurs de d.
3. Le point $A(5; -6; 5)$ appartient-il à d ?
4. Soit $B(1; 0; -9)$. Le point C milieu de $[AB]$ est-il un point de d ?
5. Déterminer la distance AB.
6. Soit Δ la droite passant par B et dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$.

   Déterminer la position relative de d et Δ. Préciser leur(s) éventuel(s) point(s) d'intersection.

Exercice 18 ★★

ABCDEFGH est un cube.



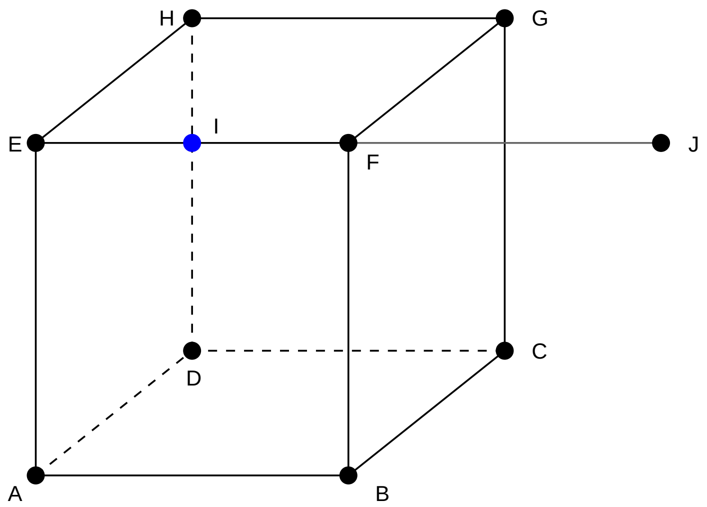
I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. a. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.

Exercice 19 ★★

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1, le milieu I de $[EF]$ et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.
   b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.
   c. Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.
2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   b. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{6}\,;\frac{5}{6}\right)$.
   Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).
3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.
   a. Calculer le volume de la pyramide $FBGI$.
   b. En déduire l'aire du triangle BGI.

Exercice 20 ★★

On se place dans un repère orthonormée de l'espace et on considère le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est :

$$2x - y + z = 4.$$

On considère de plus les points $A(6\,;-1\,;3)$, $B(0\,;0\,;4)$, $C(2\,;-1\,;-1)$ et $D\left(\frac{5}{2}\,;0\,;-1\right)$.

On note d la droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par A.

1. Déterminer lesquels des points A, B, C et D appartiennent à $\mathscr{P}$?
2. Quelle est la nature du triangle BCD ?
3. Donner une paramétrisation de d.
4. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonale de A sur $\mathscr{P}$.
5. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 21 ★★

Dans un repère de l'espace on considère le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est :

$$x - 2y + z = 5.$$

On considère de plus le point $A(5\,;0\,;-6)$ et $B(1\,;-2\,;0)$.

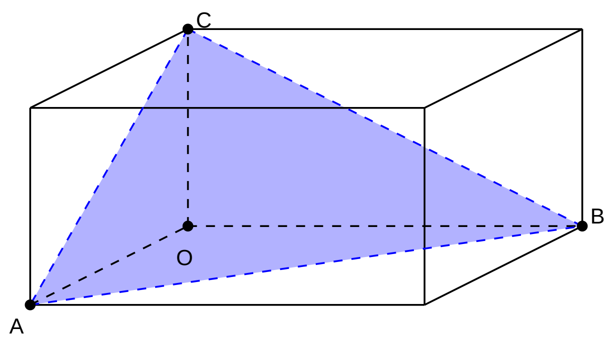
1. Justifier que le point B appartient à $\mathscr{P}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire à $\mathscr{P}$ et passant par A.
3. Déterminer les coordonnées de C intersection de d et $\mathscr{P}$.
4. Soit M un point de d.

   Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\cos\left(\overrightarrow{MB}\,,\overrightarrow{MC}\right) = \sqrt{\dfrac{6t^2 - 12t + 6}{6t^2 - 12t + 56}}$.
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{6t^2 - 12t + 6}{6t^2 - 12t + 56}$.

   Que peut-on en déduire pour l'angle $\left(\overrightarrow{MB}\,,\overrightarrow{MC}\right)$ lorsque M s'éloigne de C ?

Exercice 22 ★

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\ \vec{j}\,,\vec{k})$, on considère les points: A de coordonnées $(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$, B de coordonnées $(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$ et C de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$.



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.
2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

   b. Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\ ;\ \frac{12}{49}\ ;\ \frac{36}{49}\right)$.

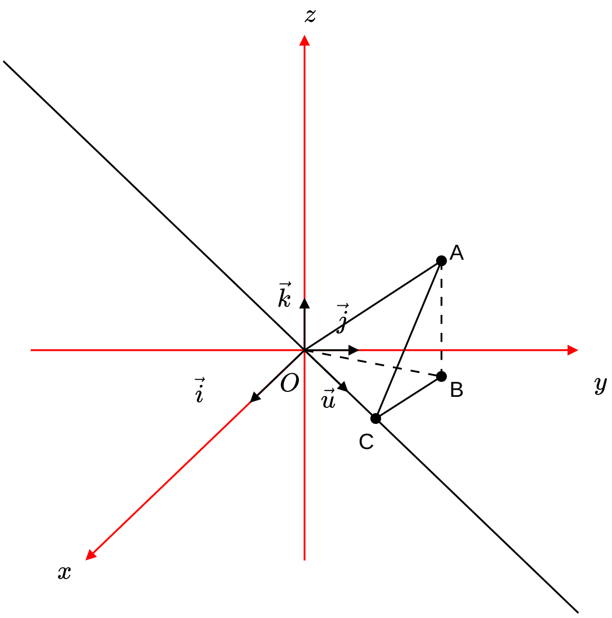
   c. Calculer la distance OH.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par: $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 23 ★★

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ on considère :

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.
   a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que:
   $$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$
   b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\,;2\,;0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
   On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\,;3\,;0)$.
   Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par: $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.