Terminale Générale ~ DM n°1

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_{n+1} = \sqrt{1+0,1u_n^2}$ et $u_0 = 2$.

1. Donner les valeurs approchées à 10^{-3} de u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier n : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
3. Que peut-on déduire de la question précédente pour la suite (u_n) ?
4. Soit v_n la suite définie pour tout entier n par $v_n = -\dfrac{10}{9} + u_n^2$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   c. Montrer que pour tout entier n : $u_n = \dfrac{1}{3}\sqrt{10 + 26 \times (0,1)^n}$.
   d. Montrer alors que la limite ℓ de (u_n) est une des solutions de l'équation $x = \sqrt{1+0,1x^2}$.
5. **Question bonus (très difficile) :**

   Montrer que pour tout entier n : $u_n = \sqrt{\dfrac{11\ldots114}{10^n}}$, où $11\ldots114$ est un nombre s'écrivant avec n chiffres 1.

Exercice 2

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies par $u_0 = 20$, $v_0 = 60$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{4} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{4}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche les 101 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

```
u = 20
v = 60
print([0,u,v])

for i in range(1,101):
    u_prec = u
    u = ...
    v = (...+2*v)/4.0
    print([i,u,v])
```

3. Montrer que les suites $(u_n + v_n)$ et $(v_n - u_n)$ sont géométriques.
4. Exprimer $u_n + v_n$ et $v_n - u_n$ en fonction de n.
5. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.
6. Déterminer la limite de chacune des suites (u_n) et (v_n).