Terminale ~ Spécialité mathématiques
Sujets de baccalauréat de probabilités

Exercice 1 -- Métropole 15 mars 2021 sujet n°1 — 5 points

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1
On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera:

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,24$.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.
   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
   a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi?
   b. Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
   c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.
2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
   a. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
   b. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$?

Exercice 2 -- Métropole 15 mars 2021 sujet n°2 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

PARTIE I
Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.
Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,03$.

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :
   a. 0
   b. 1
   c. $0,24$
   d. $0,76$

2. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :
   a. $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$
   b. $\binom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$
   c. $\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$
   d. $\binom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$
3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :
   a. $P(X < 1)$
   b. $P(X \leqslant 1)$
   c. $P(X \geqslant 2)$
   d. $1 - P(X = 0)$

PARTIE II
Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
On considère les évènements suivants:

- V_1 : « la première boule tirée est verte » ;
- B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte » ;
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

4. La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :
   a. $\frac{5}{8}$
   b. $\frac{4}{7}$
   c. $\frac{5}{14}$
   d. $\frac{20}{56}$
5. La probabilité de l'évènement V_2 est égale à :
   a. $\frac{5}{8}$
   b. $\frac{5}{7}$
   c. $\frac{3}{28}$
   d. $\frac{9}{7}$

Exercice 3 -- Amérique du Nord mai 2021 — 5 points

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A
Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants:

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,98$ (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
3. a. Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?
   b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à $0,95$.
   Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0,103$.

1. Dans cette question **1.** on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
   a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.
   b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,75$? Justifier.

Exercice 4 -- Polynésie 02 juin 2021 — 5 points

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.
Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.
Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs. Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.
Une personne est choisie au hasard dans la population. On note :

- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement: « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. a. Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif?
   b. Montrer que la probabilité que son test soit positif est de $0,065\,3$.
3. On sait que le test de la personne choisie est positif.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
   On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
4. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
   b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
   On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

Exercice 5 -- Métropole 7 juin 2021 — 5 points

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou bien « négatif ».
On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.
On note $p(E)$ la probabilité d'un évènement E.
On considère les évènements suivants :

- D : « la pièce est défectueuse » ;
- T : « la pièce présente un test positif »;
- $\overline{D}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de D et T.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle est défectueuse est égale à $0,98$;
- la probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à $0,97$.

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. a. Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.
   b. Démontrer que: $p(T) = 0,077\,5$.
3. On appelle **valeur prédictive positive** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à $0,95$.
   Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

PARTIE II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon. On rappelle que: $p(D) = 0,05$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse.
   On donnera un résultat arrondi au centième.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 6 -- Métropole 8 juin 2021 | 5 points

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.
La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les évènements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les évènements contraires des évènements M et T respectivement.

1. a. Traduire la situation par un arbre pondéré.
   b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.
   c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à $0,45$.
   d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.
2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.
   a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.
   c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.
   d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.
   a. Montrer que $p_n = 1 - 0,55^n$.
   b. Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```python
def seuil():
    n = 0
    P = 0
    while P < 0.99:
        n = n+1
        P = 1-0.55**n
    return n
```

Exécuter

   c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.