Terminale ~ Spécialité mathématique
Suites numériques

1 Démonstration par récurrence

Pour quels entiers n la propriété suivante est-elle vraie ?

$$P_n : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Correction

La somme commençant à $k=1$, la formule n'a de sens qu'à partir de $n=1$. Regardons donc si est vraie.

Pour $n=2$:

On pourrait vérifier encore pour quelques entiers que la propriété est vraie, cependant ceci ne constitue pas . Un calcul direct serait également assez compliqué, surtout avec un sigma. Pour démontrer que cette égalité est vraie pour tout entier $n \geq 1$, nous allons découvrir une nouvelle technique.
Nous allons démontrer que cette propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$ en appliquant

Propriété 1 -- *Principe de récurrence*

On veut montrer qu'une propriété P_n est vraie pour entier $n \geq n_0$, avec n_0 le premier entier où la propriété est (généralement $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$).

○ **Initialisation**

○ **Hérédité**

○ **Conclusion**

Exemple 1

Avant de démontrer que notre propriété P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$, essayons de mieux appréhender ce "principe" de récurrence. Pour cela faisons une analogie avec des insectes.
Prenons donc l'exemple d'une rangée d'insectes, alignés du premier insecte au dernier, celui-ci pouvant être infiniment loin, et mettons-les dans un contexte d'épidémie :
Si l'un est malade il transmet la maladie de manière certaine à son voisin de droite, et seulement à celui-ci.
On peut alors se poser la question si ils vont tous être malades ?
La réponse est évidemment oui si le premier insecte l'est. Si c'est le $10^{\text{ème}}$ insecte qui est le premier à tomber malade, tous les suivants le seront, mais pas ceux d'avant.
On peut dire que l'insecte numéro n transmet la maladie à l'insecte numéro $n+1$. Ceci est un processus de transmission (d'hérédité), et dès que celui-ci est initialisé (c'est-à-dire) si un insecte numéro n_0 est malade, alors tous les suivants le seront également.

Montrons maintenant, par récurrence, que : $P_n : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ est vraie

○ **Initialisation**

○ **Hérédité**

Ainsi, nous avons bien que

○ **Conclusion**

2 Définition d'une suite et représentation graphique

Définition 1 -- *Suite numérique*

Une suite numérique (u_n) est dont la variable est
$$\begin{array}{crcl} u_n : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \ & n & \longmapsto & u(n)= u_n, \text{ pour }n\geq n_0. \end{array}$$
u_{n_0} est
u_n de la suite.

Il existe plusieurs procédés pour définir une suite, nous en verrons deux :

○

○

Exemple 2

On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n + \dfrac{2}{n+1}$.

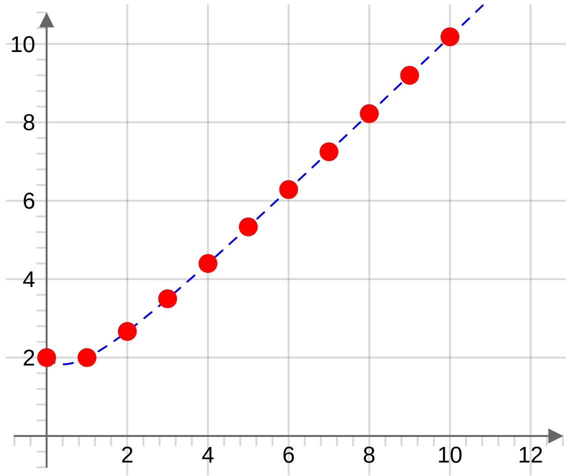
On a que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = f(n)$, avec $f(x) = x + \dfrac{2}{x+1}$.

Calculer : v_0, v_1 et v_{100}.

Correction

Remarque 1

On peut représenter les premiers termes d'une suite à l'aide d'un nuage de points où les abscisses représentent les nombres n et les ordonnées les nombres u_n correspondants.



Exemple 3

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0,2$ et $u_n = \dfrac{3u_{n-1}+2}{u_{n-1}+4}$.

Ici, pour tout $n \geq 1$, $u_n = g(u_{n-1})$, avec $g(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

Trouver des valeurs approchées de u_1, u_2, u_3 et u_{100}.

Correction

Pour calculer u_{100} cela va être un peu long, puisque nous allons devoir connaître u_{99}, mais pour celui-ci il va nous falloir u_{98}, etc.

On utilise alors l'algorithme ci-contre :

Ce qui donne en langage Python :

Après exécution, on trouve la valeur approchée suivante :

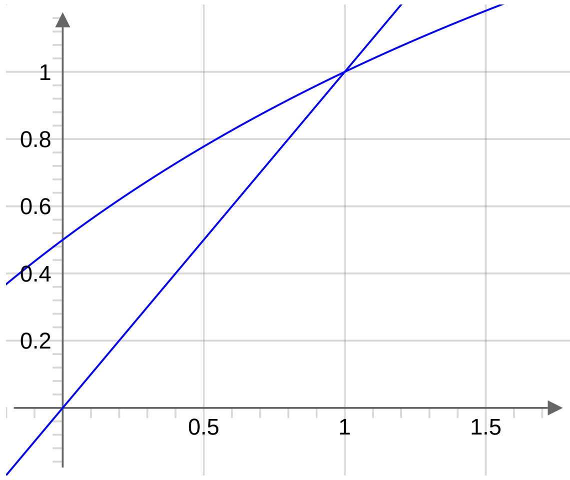
Remarque 2

Étant donnée une suite (u_n) définie par récurrence à l'aide de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on représente les premiers termes de la suite dans un repère du plan à l'aide la droite d'équation $y = x$ et la courbe représentative de la fonction f. On notera cette dernière $\mathcal{C}$.

On place u_0 sur l'axe des abscisses, et puisque $u_1 = f(u_0)$ (c'est-à-dire que u_1 est l'image de u_0 par f), on peut visualiser u_1 sur l'axe des ordonnées à l'aide de $\mathcal{C}$.

Il n'est cependant pas pratique d'avoir u_0 sur l'axe des abscisses et u_1 sur l'axe des ordonnées.

On construit ensuite u_2 à partir de u_1 de la même façon, et ainsi de suite pour les termes suivants.



3 Rappels de la classe de 1ère

Définition 2 -- *Suite arithmétique*

Une suite numérique (u_n) est arithmétique s'il existe une constante r, appelée telle que :

Remarque 3

À retenir :

- pour tout entier n,
- pour tout entier n,
- pour tout entiers n et m,
- pour tout entier n,

Définition 3 -- *Suite géométrique*

Une suite numérique (u_n) est géométrique s'il existe une constante q, appelée telle que :

Remarque 4

À retenir :

- pour tout entier n,
- pour tout entier n,
- pour tout entiers n et
- pour tout entier n,

Définition 4 -- *Suite majorée*

Une suite numérique (u_n) est lorsque ses termes sont à une même appelée

Ainsi,

Exemple 4

- La suite $(u_n) = 1 - n$ est majorée par

- La suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = n + 1$,

Définition 5 -- *Suite minorée*

Une suite numérique (u_n) est lorsque ses termes sont à une même appelée Ainsi,

Définition 6 -- *Suite bornée*

Une suite numérique (u_n) est lorsqu'elle est à la fois Ainsi,

Exemple 5

La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2 + 1}$ est bornée. En effet,

4 Variations d'une suite

Définition 7 -- *Sens de variation d'une suite*

Soit (u_n) une suite numérique.

- La suite (u_n) est si pour tout entier n,
- La suite (u_n) est si pour tout entier n,
- La suite (u_n) est si il existe tel que pour tout entier n,

Remarque 5

Lorsqu'on ne connaît pas a priori le sens de variation d'une suite (u_n) il est alors plus pratique d'étudier le signe de . En effet :

Remarque 6

Une suite peut-être monotone

Exemple 6

On considère à nouveau la suite définie pour tout n par : $v_n = n + \dfrac{2}{n+1}$.

Les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ par vont nous permettre de trouver les variations de la suite (v_n).
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$, et pour tout x sur son ensemble de définition :

La dernière égalité s'obtient à l'aide de la méthode du . On étudie, comme en classe de 1ère le signe de ce polynôme du 2nd degré.

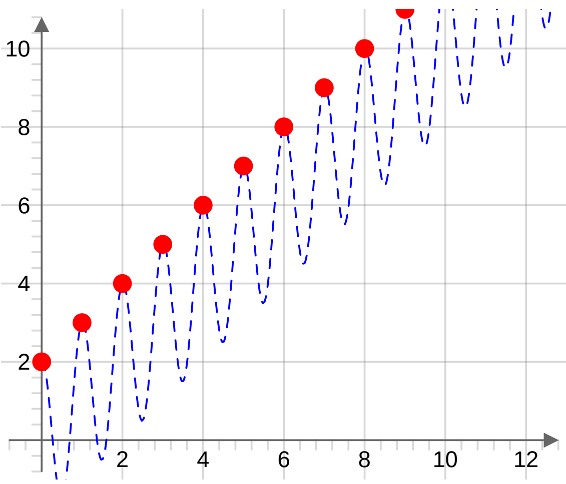
On montre ainsi que $f'(x)$ est pour tout donc la fonction f est sur $[1;+\infty[$.
Pour tout entier $n \geq 1$, :
La suite (u_n) est

Remarque 7 Une petite nuance

On considère une suite (u_n), définie par une fonction f, telle que pour tout entier n, $u_n = f(n)$. Nous avons alors :
Si f est alors (u_n) est

Mais, la proposition : "Si (u_n) est croissante alors f est croissante sur $[0;+\infty[$" est

Sur le graphique ci-contre, nous avons une suite (u_n) (représentée à l'aide des points rouges) définie par la fonction f dont la représentation graphique est donnée en pointillés.
Nous avons que la suite (u_n) est croissante alors que la fonction f ne l'est pas.



5 Limite d'une suite

5.1 Quelques exemples

On considère les trois suites ci-dessous :
- $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}$
- $v_n = n^2$
- $w_n = (-1)^n$

Compléter le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n								
v_n								
w_n								

Remarque 8

Nous pouvons décrire le comportement de ces suites en émettant les conjectures suivantes :
- (u_n) semble
- (v_n) semble ne jamais cesser
- (w_n) prend

On peut donc dire que :
- (u_n) semble posséder
- (v_n) semble
- (w_n) lorsque n grandit.

De manière, plus synthétique, on pourrait noter :

Il n'y a aucune écriture pour (w_n) car cette suite ne possède pas de limite.

5.2 Définitions

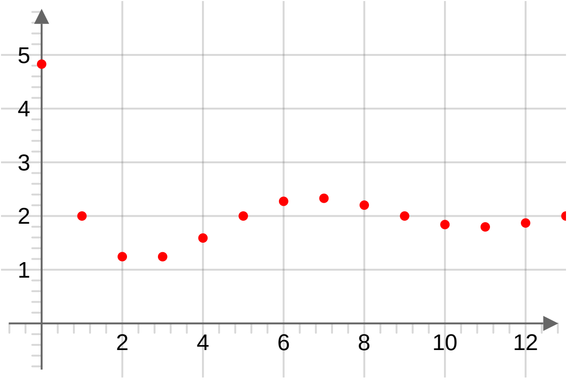
Définition 8

On dit qu'une suite (u_n)

Remarque 9

On note alors :

Sur le graphique ci-dessous, nous pouvons voir qu'à partir d'un certain rang tous les termes de la suite semblent être dans l'intervalle délimitant la zone coloriée aussi petite soit elle.



Remarque 10

Les suites non convergentes sont dites et certaines suites divergent vers

Définition 9 -- *Suite divergent vers* $+\infty$

Une suite (u_n)

Remarque 11

On note alors :

5.3 Exemples

Exemple 7

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} =$

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = n^3 + 1$ et A un nombre réel.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
2. Écrire un algorithme Python comportant une fonction qui retourne le premier rang à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grand que A.

Correction

1. La fonction f définie par $f(x) = x^3 + 1$ est

2.

5.4 Opération sur les limites

Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$						

Remarque 12

"f.i" signifie et qu'il faut fournir des efforts supplémentaires pour donner la limite. En effet lorsqu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et une suite (v_n) vers $-\infty$, on ne peut connaître sans calculs préliminaires la limite de $(u_n + v_n)$.

Voici plusieurs situations :

- Pour tout entier n, on pose $u_n = n^2 + 1$ et $v_n = -n^2$. On a bien :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$
  Par ailleurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$
- Pour tout entier n, on pose $u_n = n^2 + n$ et $v_n = -n^2$. On a bien :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$
  Dans ce cas : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$
- Pour tout entier n, on pose $u_n = n^2$ et $v_n = -n^2 - n$. On a bien :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$
  Et enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$

Nous voyons donc bien que la suite $(u_n + v_n)$ peut avoir n'importe quelle limite sous ses hypothèses. Il sera donc nécessaire de déterminer la limite dans cette situation après quelques calculs.

Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$l \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \times v_n$				

Remarque 13

Pour le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \infty$, on ne précise pas dans ce tableau si ce sont des $+$ ou $-$ l'infinie. La limite du produit divergera vers ∞ en appliquant
On utilise cette règle dans l'exemple suivant :

Remarque 14

$\lim\limits_{n \to +\infty} (3 - n^2)(-4n^3 - n + 1) =$

En effet, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 - n^2 =$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -4n^3 - n + 1 =$

On obtient le résultat en appliquant la règle sur de limites précédente.

Limite d'un quotient

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	∞	∞
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	∞	ℓ'	∞
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n}$				

Exemple 8

On cherche à déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{3 + \sqrt{n}}$.

On a: $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \sqrt{n} =$ et donc d'après la règle sur les de limites on obtient :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{3 + \sqrt{n}} =$

5.5 Limites et comparaisons

Propriété 2

ROC

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que à partir d'un certain rang :

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$

Preuve

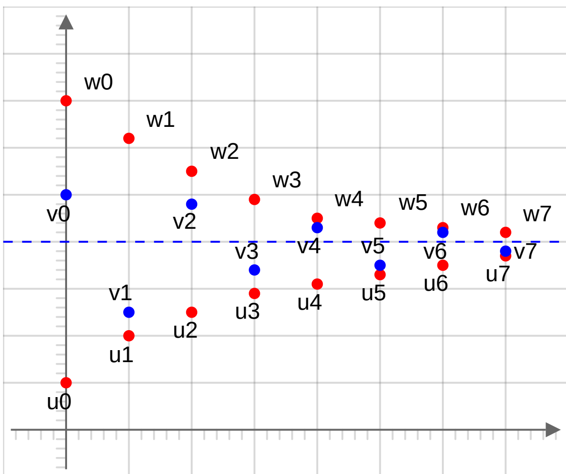
On considère un intervalle ouvert de la forme

On cherche à démontrer qu'à partir d'un certain rang, .

Propriété 3 -- *Encadrement des limites*

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que à partir d'un certain rang :

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$



Remarque 15

Dans le graphique précédent nous pouvons observer deux suites encadrer une troisième. Et puisque les deux premières convergent vers ℓ, la suite comprise entre les deux se trouve coincée et doit, elle aussi, converger vers ℓ.

Cette propriété est également connue sous le nom imagé de "théorème des gendarmes", ou plus prosaïquement théorème d'encadrement des limites.

Exemple 9

Déterminons la limite de la suite (u_n), définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Pour tout entier $n \geq 1$:

Or, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n} =$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} =$

Ainsi, d'après le théorème

5.6 Comportement des suites arithmétiques et géométriques

Propriété 4 -- *Comportement des suites arithmétiques*

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

- si alors (u_n) est et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$
- si alors (u_n) est et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$
- si alors (u_n) est et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$

Preuve

On sait que : u_{n+1} donc

Par ailleurs, $u_n =$

Ainsi, si $r > 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times r =$ et, si $r < 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times r =$

Propriété 5 -- *Comportement des suites géométriques de raison $q > 1$*

ROC

Soit (u_n) une suite géométrique de raison

- si alors (u_n) est et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$
- si alors (u_n) est et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$

Pour démontrer cette propriété nous aurons besoin du résultat suivant appelé **inégalité de Bernoulli** :

Propriété 6 -- *Lemme -- Inégalité de Bernoulli*

ROC

Soit a un nombre réel . Alors pour tout entier n :

Preuve du lemme

Procédons par récurrence sur n.

Initialisation

Hérédité

Le passage de la première à la deuxième ligne se fait en utilisant . Le passage de l'avant-dernière à la dernière se justifie par le fait qu'un nombre à qui l'on retire une quantité positive (ici na^2) devient

Conclusion

Preuve de la propriété sur les suites géométriques de raison $q > 1$

On note (u_n) une telle suite, et nous avons :

Ainsi, la raison étant en particulier positive, tous les termes de la suite seront
Et puisque
La suite (u_n) est bien

Pour déterminer la limite de (u_n), il nous suffit de faire la remarque suivante :

Or, pour tout entier n, u_n . C'est-à-dire :

On a, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na =$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$

Si , $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$

Propriété 7 -- *Comportement des suites géométriques de raison* $q \in]0;1[$

Soit (u_n) une suite géométrique de raison

○

○

Exemple 10

- $\lim_{n \to +\infty} 3,1^n =$
- $\lim_{n \to +\infty} -3 \times (0,8)^n =$
- $\lim_{n \to +\infty} (-0,2)^n =$ à l'aide du théorème d'encadrement .
- La suite géométrique (u_n) de premier terme 1 et de raison $-2,6$ est telle que $u_n =$

Remarque 16

On peut synthétiser les résultats précédents dans les tableaux ci-dessous :

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \to +\infty} q^n$				

	$q < 0$	$0 \leq q < 1$	$q > 1$
sens de variation de (q^n)			

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$ et $u_0 > 0$	$q > 1$ et $u_0 < 0$
$\lim_{n \to +\infty} u_0 q^n$					

	$q < 0$	$0 \leq q < 1$ et $u_0 > 0$	$0 \leq q < 1$ et $u_0 < 0$	$q > 1$ et $u_0 > 0$	$q > 1$ et $u_0 < 0$
sens de variation de $(u_0 q^n)$					

5.7 Convergence et monotonie

Propriété 8 -- *Suite croissante non majorée*

ROC

Propriété 9 -- *Suite décroissante non minorée*

Preuve de la propriété 8

Preuve de la propriété 9

Propriété 10 -- *Convergence monotone*

Propriété 11 -- *Convergence monotone*

Preuve de la propriété 10

Propriété 12 -- *Suite croissante et convergente*

Toute suite (u_n) convergeant vérifie :

Preuve
Nous allons raisonner par en supposant le de ce que nous voulons démontrer, et en arrivant ensuite à