Terminale ∼ Spécialité mathématique
Combinatoire et dénombrement

1 Factorielle d'un entier et triangle de Pascal

1.1 Factorielle d'un entier

Définition 1

Soit n un entier naturel. On appelle le nombre entier noté qui est égale de tous les entiers de si $n \geq 1$, ou qui vaut

Exemple 1

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\dfrac{8!}{6!}$ b. $\dfrac{20!}{17!}$ c. $\dfrac{n!}{(n-1)!}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. d. $\dfrac{(n+2)!}{n!}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction

a. $\dfrac{8!}{6!} =$

b. $\dfrac{20!}{17!} =$

c. $\dfrac{n!}{(n-1)!} =$

d. $\dfrac{(n+2)!}{n!} =$

Exemple 2

Les deux algorithmes ci-dessous permettent de calculer la factorielle de n'importe quel nombre entier.

Algorithme n°1	**Algorithme n°2 récursif**

Un algorithme   est un algorithme qui résout un problème en calculant des solutions à partir de versions plus petites du même problème. Il s'agit d'un concept fondamental en informatique.

1.2 Triangle de Pascal

Exercice 2

Compléter le tableau suivant :

1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	...	...	1	
1	...	...	...	...	...

Remarque 1

Ce tableau s'appelle « le triangle de   ».

2 Cardinal d'ensembles

Définition 2

Soit n un entier naturel et E un ensemble possèdant n éléments.
On dit alors que E est un   et son nombre d'éléments est appelé   de E. On le note

Exercice 3

Soit C l'ensemble des codes à quatre chiffres et D l'ensemble des codes à quatre chiffres sans répétition (tous les chiffres du code sont distincts).
Déterminer $\text{card}(C)$ et $\text{card}(D)$.

Correction

Lorsqu'on compose un code à quatre chiffres on a   choix pour chacun des chiffres. Ainsi,

Lorsque les quatre chiffres sont distincts on a   possibilités pour le premier chiffre, puis   pour le deuxième,   pour le troisième et   pour le quatrième. Ainsi :

Remarque 2

- $\text{card}(\varnothing) =$
- Certains ensembles ne sont pas finis. Par exemple l'ensemble   des entiers naturels, l'intervalle   etc.

Définition 3

On dit que deux ensembles A et B sont   si

Propriété 1

Soient A et B deux ensembles disjoints. On a alors :

Exemple 3

Soit P l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 30 et Q l'ensemble des multiples de 4 inférieurs à 30. On a : $\operatorname{card}(P \cup Q) =$

Propriété 2

Soit n un entier naturel non nul, et $A_1, A_2, ..., A_n$ des ensembles finis, deux à deux On a :

Remarque 3

On pourrait démontrer cette propriété par

Définition 4

- Un de deux éléments a et b d'un ensemble E est la donnée de ces deux éléments dans un particulier. On le note
- Un de trois éléments a, b et c d'un ensemble E est la donnée de ces trois éléments dans un particulier. On le note

Exemple 4

Soit $E = [\![0;9]\!]$. L'ensemble des couples de E est de cardinal de car par exemple le couple est différent du couple

Définition 5

Soient A et B deux ensembles. Le de E et F, noté est l'ensemble des avec e et f des éléments respectifs de

Propriété 3

Soient E et F deux ensembles finis. On a :

Exemple 5

Soit E un semble de couleurs possibles pour un maillot. $E = \{\mathrm{R}\,;\mathrm{V}\,;\mathrm{B}\}$, pour rouge, vert et bleu.
Soit F l'ensemble des numéros possibles que peuvent porter ces maillots. $F = \{1;2;3;4;5\}$.
L'ensemble des maillots possibles (couleurs + numéros) est :

Son cardinal est de

Propriété 4

Soit n un entier naturel non nul, et $A_1, A_2, ..., A_n$ des ensembles finis. On a :

Remarque 4

On note A^2 l'ensemble ou encore A^3 l'ensemble etc.

3 k-uplets ~ Parties d'un ensemble ~ Arrangements ~ Permutations

Définition 6

Soit A un ensemble fini et k un entier naturel non nul. On appelle de A un élément de

Exemple 6

Un mot formé de 8 lettres est un de l'alphabet.

Remarque 5

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si A est un ensemble fini de cardinal n, alors en appliquant la formule du cardinal d'un produit cartésien, il existe k-uplet de A.
En effet, $\text{card}(E^k) =$

Définition 7

Une d'un ensemble E est un

Remarque 6

Pour $E = \{a\,;b\,;c\}$ les parties de E sont :

Le nombre de parties de E est ici de

Propriété 5

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de parties de E est de

Preuve
On note les éléments de E.
On associe à chaque partie P de E un unique de la manière suivante : pour tout entier i entre 1 et n, on note si e_i est Par exemple, on associe à $\{e_1, e_5\}$ le n-uplet
Ainsi, le nombre de parties de E est égal au nombre de

Définition 8

Soient A un ensemble non vide de cardinal n et k un entier naturel inférieur ou égal à n.
Un de k éléments de A est un d'éléments de A.

Exemple 7

Si $A = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ alors et sont des de trois éléments de A.
Par contre $(a\,;b\,;b)$ d'éléments de A.

Propriété 6

Soient A un ensemble fini non vide à n elements et k un entier naturel tel que $k \leq n$.
Le nombre de k-arrangements de A est égal à :

Preuve
Pour construire un k-uplet de A, on a choix pour le premier élément, puis choix pour le deuxième, etc, jusqu'à choix pour le élément.
Ainsi, le nombre d'arrangement de k éléments de A est :

Définition 9

Soit A un ensemble fini non vide de cardinal n.
Une de A est un d'éléments de A.

Exemple 8

Si $A = \{1\,;2\,;3\}$, les permutations de A sont

Propriété 7

Le nombre de permutations sur un ensemble de cardinal est de

Preuve
D'après la propriété précédente, une permutation étant un de n éléments sur un ensemble de n éléments, leur nombre est de :

4 Combinaisons d'un ensemble fini

Définition 10

Soit A un ensemble fini de cardinal n et k un entier naturel tel que $k \leq n$.
Une de k éléments de A est une
Le nombre de combinaisons de

Remarque 7

Dans une combinaison il n'y a pas de notion
Par exemple les combinaisons de deux éléments de $E = \{a\,;b\,;c\}$ sont :

On remarque donc que
On peut d'ailleurs voir que l'ensemble vide étant la seule partie d'un ensemble ne possédant

Propriété 8

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$. Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble de cardinal n vérifie :

Preuve

Dans un ensemble de n éléments il y a arrangements de k éléments (ou k-uplets sans

).
Or, dans un k-uplet l'ordre compte. Cependant il y a façons de permuter k éléments. Donc on peut les k-uplet par paquets de pour ne les compter qu'une seule fois pour correspondre à une combinaison (puisque pour une combinaison l'ordre).
Ainsi, le nombre de combinaison de k éléments parmi n vérifie :

Exercice 4

Déterminer :

$\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ et $\binom{2}{2}$.

$\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$.

Correction

a. $\binom{2}{0} =$

$\binom{2}{1} =$

$\binom{2}{2} =$

b. $\binom{3}{0} =$

$\binom{3}{1} =$

$\binom{3}{2} =$

$\binom{3}{3} =$

Propriété 9

Soit $n \in \mathbb{N}$.

-
- si $n \geq 1$,

- si $n \geq 2$,

Preuve

-

- si $n \geq 1$,

- si $n \geq 2$,

Propriété 10

ROC

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$. On a alors :

Preuve

Propriété 11

Soient n et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n-1$. On a alors :

Preuve n°1

On remarque alors que :

-
-

Le dénominateur commun dans $\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \dfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$ est donc

Il faut donc :

- multiplier le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ par
- multiplier le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$ par

On a alors :

Preuve n°2
Soit E un ensemble de cardinal et soit a un élément de On définit les ensembles suivants :

- A l'ensemble
- B l'ensemble
- C l'ensemble

Le cardinal de A est
L'ensemble B contenant a pour le construire il faut donc choisir éléments (puisqu'on a est) parmi les $n-1$ restants (tous les éléments de E). Le cardinal de B est donc

De même, pour construire C il nous faut choisir éléments parmi (tous les éléments de E sauf a). Son cardinal est donc

Remarquons que B et C sont disjoints (c'est-à-dire).
Par ailleurs une partie à k éléments de E, Ainsi : et :

Remarque 8

Cette formule justifie la construction du triangle de Pascal.

Propriété 12

ROC

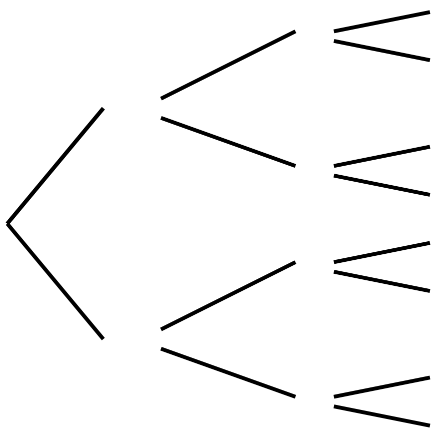
Pour tout entier n :

Preuve.
Soit E un ensemble de cardinal n.

Pour tout entier k inférieur à n, le nombre correspond au nombre de

Ainsi, la somme correspond

Illustration dans le cas où $n = 3$.
On note $E = \{e_1 ; e_2 ; e_3\}$ un ensemble à trois éléments.
Pour déterminer l'ensemble des parties de E on peut parcourir l'arbre ci-dessous, la notation $\overline{e_1}$ voulant dire que l'on ne choisit pas l'élément e_1 :



Il y a chemins possibles dans cet arbre qui sont respectivement :

Il y a partie à élément qui est :

Il y a parties à élément qui sont :

Il y a parties à 2 éléments qui sont :

Il y a $\binom{3}{3} = 1$ parties à éléments qui est :

Dans cette illustration nous avons bien :

Dans la démonstration on a généralisé cet exemple à un arbre contenant chemins possibles en rassemblant les chemins par