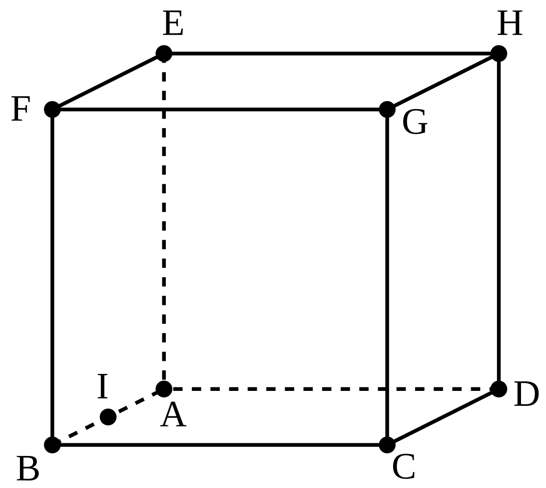
Terminale ~ Spécialité mathématique
Géométrie dans l'espace (1)

1 Droites et plans de l'espace

On considère un cube $ABCDEFGH$ et I le milieu de $[AB]$.



On illustrera diverses propriétés à partir de cette figure dans les sous-paragraphes suivants.

1.1 Positions relatives

Deux droites peuvent être :

-
- par exemple ci-contre :
- par exemple ci-contre : (l'intersection est alors le point)
- par exemple ci-contre :

Deux plans peuvent être :

- par exemple ci-contre :
- par exemple ci-contre :
- par exemple ci-contre : L'intersection est alors en l'occurrence la droite

La position d'une droite relativement à un plan peut être :

-
- par exemple ci-contre :
- par exemple ci-contre :

Remarque 1

- On dit que deux plans sont si ils sont
- On dit qu'une droite est à un plan, si elle est à ce plan mais dans celui-ci.

1.2 Parallélisme

Propriété 1

Deux droites parallèles à une même droite sont

Exercice 1

Montrer que dans notre figure (AD) et (FG) sont parallèles.

Correction

(AD) est parallèle à car $ABCD$ est de plus (BC) est parallèle car $CBGF$ est donc (AD) est à (FG).

Propriété 2

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est

Exemple 1

(AD) est parallèle au plan (FGI) puisque (AD) est

Propriété 3

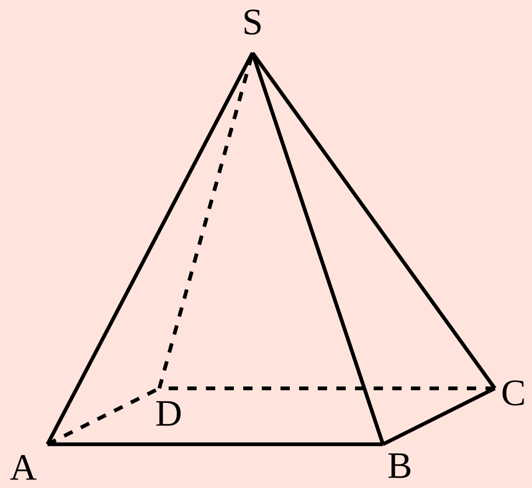
Deux plans sont parallèles si et seulement si

Exercice 2

Soit $ABCD$ est un parallélogramme et S un point n'appartenant pas au plan (ABC). Soient I, J et K les milieux respectifs de $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.
Montrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Correction

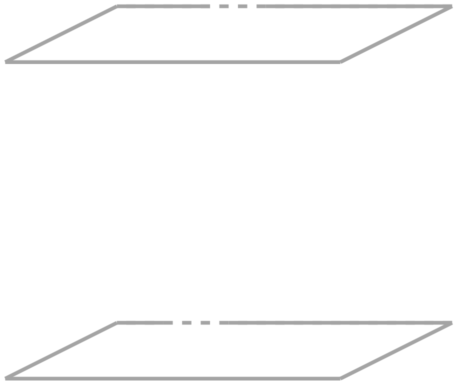
Construisons tout d'abord la figure.
Dans le plan (SAB), d'après le théorème (IJ) est à (AB).
De même (JK) est à (BC) et d'après la propriété précédente on peut affirmer que les plans (IJK) et (ABC) sont



Propriété 4

Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est et les droites d'intersection sont

Illustration



1.3 Orthogonalité

Définition 1

Deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont dites s'il existe une droite $\mathscr{D}'_1$ à $\mathscr{D}_1$ et une droite $\mathscr{D}'_2$ à $\mathscr{D}_2$ telles que dans le plan qu'elles déterminent.

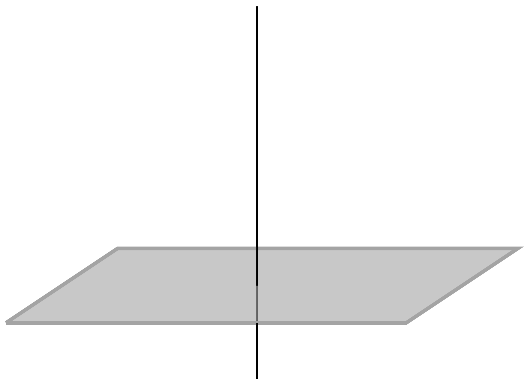
Remarque 2

Deux droites perpendiculaires sont et sont donc
Deux droites orthogonales peuvent ne pas être Dans ce cas elles sont

Définition 2

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est

Illustration



Exemple 2

Dans le cube du début de paragraphe, la droite (FG) est perpendiculaire au plan (ABE) puisqu'elle est orthogonale aux droites (puisque les faces d'un cube sont des).

Propriété 5

Si une droite est perpendiculaire à un plan alors elle est

Remarque 3

À l'aide d'un stylo et d'une feuille de papier on peut retrouver les propriétés suivantes :

- Il existe une unique droite passant par un point A et perpendiculaire à un plan donné.
- Il existe un unique plan passant par un point A et perpendiculaire à une droite donnée.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, alors toute droites perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

2 Vecteurs et repérages dans l'espace

Propriété 6

Les propriétés vues pour les vecteurs du plan restent valables pour les vecteurs de l'espace.

Exemple 3

Soient A, B et C trois points de l'espace :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=$

2.1 Repère

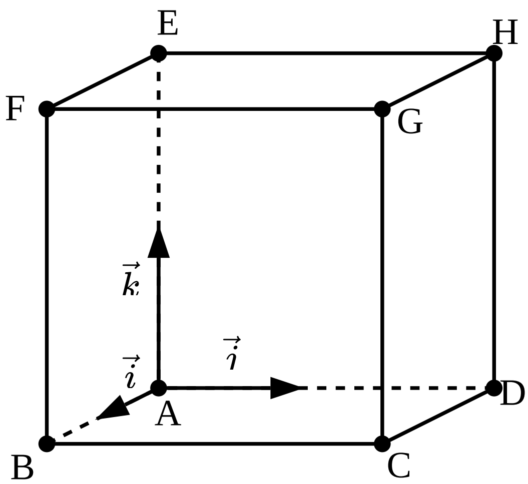
Propriété 7

- Si O, I, J et K sont quatre points non coplanaires de l'espace et si $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$, alors le quadruplet $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ constitue un de l'espace.
- Pour tout point M de l'espace il existe de réels $(x;y;z)$ tels que

  On appelle ce triplet les du point M où :
  - x est
  - y est
  - z est
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe de réels $(x;y;z)$ tels que On appelle ce triplet les du vecteur $\vec{u}$.

Exemple 4

On considère un cube $ABCDEFGH$ dans un repère orthonormal de l'espace $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ donné ci-dessous où $\vec{i}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



Les coordonnées des sommets du cube sont :

- A
- B
- C
- D
- E
- F
- G
- H

Remarque 4

De même que dans le plan, on parlera de repère orthogonal lorsque les axes seront deux à deux perpendiculaires et de repère orthonormal lorsqu'il sera orthogonal et que les vecteurs unitaires, $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, auront la même

Propriété 8

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace.

- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
- Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées :
- Si le repère est orthonormé alors : $AB =$

Exercice 3

On considère deux points de l'espace $A(2; 5; -4)$ et $B(4; -2; 10)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer les coordonnées du point C milieu de $[AB]$.
3. Déterminer la longueur du segment $[AB]$.

Correction

1. $\overrightarrow{AB} =$
2. $x_C =$

   $y_C =$

   $z_C =$

   Le point C a donc pour coordonnées :
3. $AB =$

2.2 Vecteurs colinéaires

La définition suivante est encore proche de celle donnée dans le plan.

Définition 3

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits si il existe une constante réelle telle que

Exemple 5

On considère trois vecteurs de l'espace $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\7\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\\-14\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-9\\2\\0\end{pmatrix}$

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont
- Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$

Propriété 9

- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si

Exercice 4

On considère trois points de l'espace $A(3;3;2)$, $B(-7;3;22)$ et $C(1;3;6)$. Montrer que C appartient à la droite (AB).

Correction

Montrons pour cela que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont

$\overrightarrow{AB} =$

$\overrightarrow{AC} =$

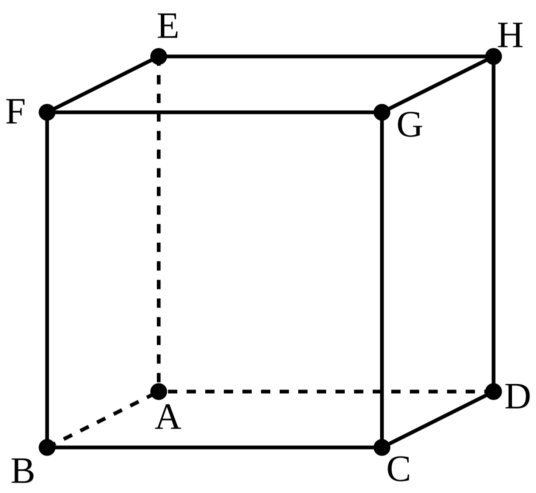
Nous avons alors que : ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont les points A, B et C sont donc

2.3 Vecteurs coplanaires

Définition 4

Des vecteurs sont coplanaires si, et seulement si, leurs représentants de même ont leurs dans un même

Exemple 6



Dans le cube ci-contre :

-
-
-

Remarque 5

Les trois vecteurs de base d'un repère de l'espace

Propriété 10

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si tels que :

Exemple 7

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ sont coplanaires car

Remarque 6

Lorsque trois vecteurs seront connus par leurs coordonnées il ne sera pas toujours aussi aisé de montrer qu'ils sont coplanaires.
De manière générale on sera obligé de résoudre un système d'équations en posant λ et μ (de l'écriture de la propriété précédente) en inconnues.

Définition 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs Soient $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et Ω un point de $\mathscr{P}$.

Si les points A et B définis par et appartiennent à on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le plan $\mathscr{P}$.

Remarque 7

On dit également que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Définition 6

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs coplanaires. Les réels x et y tels que sont appelées les coordonnées de $\vec{w}$ dans

Propriété 11

Les points A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

Exercice 5

Montrer que les points $A(1;0;1)$, $B(2;2;4)$, $C(3;0;5)$ et $D(5;4;11)$ sont coplanaires.

Correction

Déterminons tout d'abord les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB} =$

$\overrightarrow{AC} =$

$\overrightarrow{AD} =$

Nous remarquons que :

Les points $A(1;0;1)$, $B(2;2;4)$, $C(3;0;5)$ et $D(5;4;11)$

Définition 7

Trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ qui ne sont pas coplanaires sont dits

Remarque 8

Trois vecteurs linéairement indépendants forment de l'espace. Cela signifie que tout vecteur de l'espace peut s'exprimer comme une de ces vecteurs de base, et donc tout vecteur de l'espace s'exprime alors à l'aide de nouvelles dans cette base.

Concrètement, si $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$ est une base de l'espace, alors pour tout vecteur $\vec{f}$ il existe trois réels $(x\,;y\,;z)$ tels que

Propriété 12

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Alors :
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont si et seulement si, pour tous réels a, b et c,

Remarque 9

Cette propriété permettra, étant donné trois vecteurs dont on connaît les coordonnées, de démontrer qu'ils forment une base de l'espace.

Exercice 6

Montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ forment une base de l'espace.

Correction

Soient a, b et et c trois réels tels que
On a alors :

Ainsi :

C'est-à-dire :
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont et forment bien

2.4 Caractérisation vectorielle dans l'espace

Concernant les droites
Pour définir une droite nous avons besoin :

- soit
- soit

Propriété 13 *Caractérisation vectorielle d'une droite*

On considère une droite $\mathscr{D}$ passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$. Pour tout point M de l'espace on a:

Concernant les plans
Pour définir un plan nous avons besoin :

- soit
- soit

Propriété 14 *Caractérisation vectorielle d'un plan*

On considère un plan $\mathscr{P}$ passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Pour tout point M de l'espace on a:

Remarque 10

Quand on voudra vérifier que trois points de l'espace définissent un plan, il suffira de s'assurer que ceux-ci
et donc que deux des vecteurs qu'ils définissent

Propriété 15

Une droite $\mathscr{D}$ est parallèle à un plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, un

Remarque 11

Deux plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont

3 Représentations paramétriques d'une droite

On considère une droite $\mathscr{D}$ passant par un point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix}a\b\c\end{pmatrix}$ $\neq \vec{0}$.

En reprenant la caractérisation vectorielle d'une droite, nous avons les équivalences suivantes :

$M(x;y;z) \in \mathscr{D} \iff$

$\iff$

$\iff$

$\iff$

Propriété 16

Si $\mathscr{D}$ est la droite passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix}a\b\c\end{pmatrix}$. Alors :

Remarque 12

Exemple 8

Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(31;1;29)$ et $B(12;-2;25)$ est :

Nous avons ici utilisé les coordonnées du point A et celles du vecteur

Nous aurions pu également utiliser les cordonnées du point B, celles du vecteur ou encore celles de
ou tout autre vecteur de (AB).

La paramétrisation aurait été mais aurait bien définie
Ceci nous conduit à faire la remarque suivante.

Remarque 13

Il n'y a pas de la représentation paramétrique d'une droite.