Terminale ∼ Spécialité mathématiques
Succession d'épreuves indépendantes / Schéma de Bernoulli

1 La planche de Galton

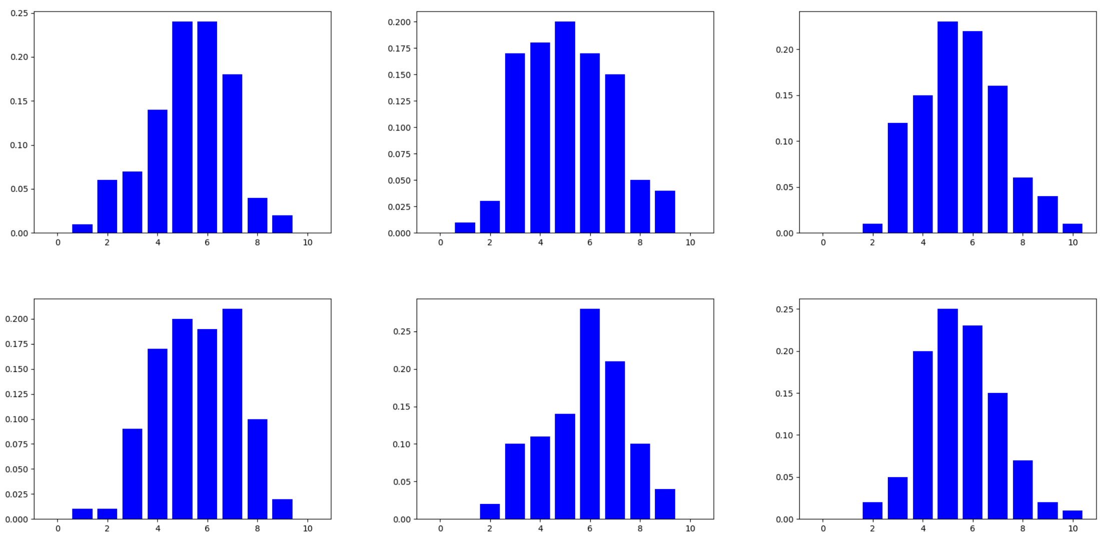
Un algorithme Python pour déterminer les effectifs de chacun des résultats possibles :

```
from random import*

def galton(n,m):
    A = [0]*(n+1)
    L = [0]*(n+1)
    for j in range(0,m):
        X = 0
        for i in range(0,n+1):
            X = X + randint(0,1)
        L[X] = L[X]+1

    return L

print(galton(10,100))
```

Un autre algorithme permettant cette fois-ci d'afficher un graphique des résultats obtenus.

```
from random import*
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def galton(n,m):
    A = [0]*(n+1)
    L = [0]*(n+1)
    for j in range(0,m):
        X = 0
        for i in range(0,n+1):
            X = X + randint(0,1)
        L[X] = L[X]+1

    for i in range(0,n+1):
        L[i] = L[i]/m
        A[i] = i

    fig = plt.figure()
    bars = plt.bar(A, L, color='blue' )
    plt.show()

    return L


M = galton(10,100)
print(M)
```

Quelques résultats après exécution de cette algorithme.



2 Rappels de probabilités

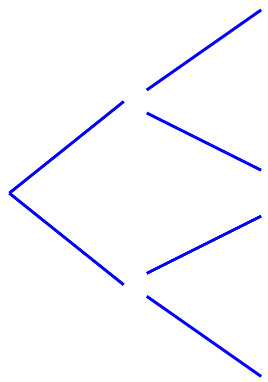
On considère dans ce paragraphe un univers probabilité Ω ainsi que A et B deux évènements de Ω.

$P(\overline{A}) =$ $P(A \cup B) =$ $P_B(A) =$ si

$P(A \cap B) =$ si

Dans l'arbre ci-dessous la formule des probabilités totales nous donne :

ou encore :



3 Succession d'épreuves indépendantes

Définition 1 -- *Événements indépendants*

Dire que A et B sont deux évènements avec $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ signifie que :

Remarque 1

Si deux évènements A et B sont indépendants alors $P_A(B) =$ ou encore $P_B(A) =$
En effet, on a par exemple :

Exemple 1

On considère une urne contenant 13 boules blanches et 13 boules bleues indiscernables au toucher.
On effectue un premier tirage. La probabilité d'obtenir une boule bleue est de $\frac{1}{2}$.
Si on remet la boule dans l'urne, au deuxième tirage la probabilité d'obtenir à nouveau une boule bleue sera encore de par contre si on ne remet pas la boule dans l'urne, au deuxième tirage la probabilité d'obtenir une boule bleue est soit de soit de en fonction du résultat du

Ainsi, dans le cas d'un tirage avec remise on peut considérer qu'il y a

Remarque 2

Il y a indépendance dans les situations suivantes :

- tirages successifs
- lancers successifs d'un objet sans (dé, pièce de monnaie etc.).

Il n'y a PAS indépendance si les tirages successifs sont

Propriété 1

Soient n un entier naturel supérieur à 2 et $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n épreuves définies respectivement sur les univers probabilisés $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$.
L'univers des possibles est alors le et une issue possibles est un avec e_i une issue de
La propabilité d'obtenir le n-uplet $(e_1 ; e_2 ; \ldots ; e_n)$ est alors égale au des probabilités de chaque issue e_i, c'est-à-dire :

Exemple 2

JP prend une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes alors qu'au même moment JC lance un dé cubique parfait et HR lance une pièce de monnaie.
Ces trois épreuves étant indépendantes, la probabilité d'obtenir $(V; 6; F)$ vaut alors :

Remarque 3

Un arbre de probabilité peut être utile pour calculer des probabilités dans une situation de succession d'épreuves indépendantes.

4 Schéma de Bernoulli / Loi binomiale

Définition 2

Une épreuve de de paramètre p, avec $p \in [0 ; 1]$, est une expérience qui n'a que issues possibles, l'une appelée « succès », qui a pour probabilité et l'autre appelée « échec », qui a pour probabilité

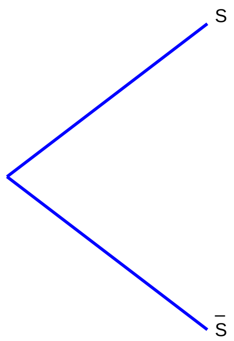
Exemple 3

- On possède une pièce de monnaie truqée telle que la probabilité d'obtenir pile est de $0,6$. Le fait de lancer cette pièce et de regarder si on obtient pile ou non est une épreuve de de paramètre
- Un automobiliste se presente de manière aléatoire devant un feu qui est vert durant 40 secondes, oranges 5 secondes et rouge 25 secondes.

  Le fait que le feu soit vert lorsque l'automobiliste se présente devant est une épreuve de Bernoulli de paramètre

Remarque 4

On peut représenter une épreuve de Bernoulli à l'aide d'un arbre de probabilité à deux branches. Par exemple en notant S l'évènement correspondant au succès, on a :



Définition 3

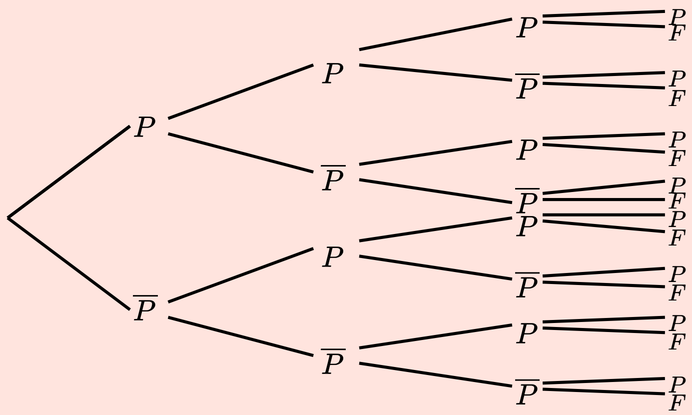
Soient n un entier naturel non nul et $p \in [0 ; 1]$.
L'expérience aléatoire qui consiste à de manière n épreuves de identiques de paramètres p, s'appelle un de paramètres

Exercice 1

On possède une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir pile est de $0,6$. On considère l'épreuve de Bernoulli qui consiste à lancer cette pièce et de regarder si on obtient pile ou non.
On s'intéresse au schéma de Bernoulli correspondant de paramètres 4 et $0,6$. En s'aidant d'un arbre de probabilité compléter le tableau ci-dessous.

Nombre de piles obtenus	0	1	2	3	4
Nombre de chemins dans l'arbre					
Probabilité					

Correction



Les probabilités sont obtenues en additionnant les probabilités de chaque chemin qui elles sont calculées à l'aide de produits de probabilités puisque les épreuves sont

Définition 4

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,;1]$.
La loi de probabilité de la variable qui compte le parmi les n du schéma de Bernoulli s'appelle .

Remarque 5

L'expression « X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p » peut se noter Le symbole $\sim$ se lit alors :

Propriété 2

ROC

Soit n un entier naturel non nul et $p \in [0\,;1]$.
On considère une variable aléatoire X suivant la loi de paramètres n et p.
Pour tout entier $k \leq n$, on a :

Preuve

La répétition des n épreuves de Bernoulli peut être représentée par un arbre de probabilité à branches.
Chaque branche permettant d'obtenir succès possède également échecs. Les épreuves étant la probabilité d'une telle branche est de
Le nombre de branches possèdant k succès les n épreuves est de ainsi on a bien :

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 20 et $0,3$.
Déterminer, en utilisant une calculatrice les probabilités suivantes. On arrondira les résultats à 10^{-3}.

$P(X=5)$ $\quad$ $P(X \leq 10)$ $\quad$ $P(X<4)$ $\quad$ $P(X>6)$ $\quad$ $P(X \geq 8)$

Correction

•

•

• La calculatrice ne permet pas de calculer directement $P(X<4)$, mais puisque X ne prend que des valeurs entières, si $X<4$ alors

Ainsi :

• Ici aussi la calculatrice ne permet pas directement de calculer $P(X>6)$. Il va falloir ici passer par l'événement de $X>6$ qui est

Ainsi :

•

Exercice 3

Expliquer le rôle de chacune des fonctions de l'algorithme ci-dessous :

```python
def facto(n):
    f = 1
    if n > 1:
        for i in range(1,n+1):
            f = f*i
    return f

def comb(n,k):
    return facto(n)/(facto(k)*facto(n-k))

def binom(n,p,k):
    s = p**k
    e = (1-p)**(n-k)
    return comb(n,k)*s*e

def binomInf(n,p,k):
    r = 0
    for i in range(0,k+1):
        r = r+binom(n,p,i)
    return r
```

Correction

facto(n) permet de calculer la d'un entier **n**.

comb(n,k) permet de calculer

binom(n,p,k) permet de calculer

binomInf(n,p,k) permet de calculer