# Terminale ~ Spécialité mathématique
# Continuité / Fonctions convexes

## 1 Continuité

### 1.1 Définition

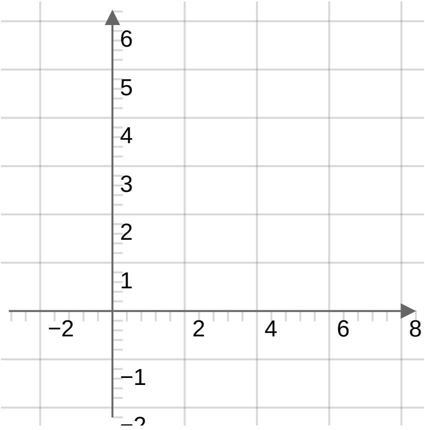
**Définition 1** -- *Fonction continue*

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ une fonction définie sur $I$, et $a$ un réel appartenant à l'intervalle $I$.
$f$ est

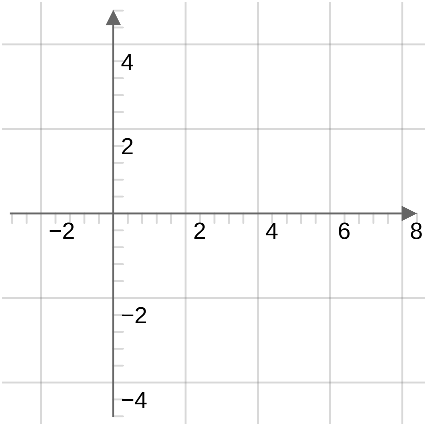
$f$ est si pour tout réel $a \in I$ : $f$ est

**Remarque 1**

La notion de continuité d'une fonction se traduit par une représentation graphique tracée « sans » le crayon.




*Courbe d'une fonction continue sur* $[-2\,;7]$.




*Courbe d'une fonction non continue sur* $[-2\,;7]$.

**Propriété 1**

Les fonctions polynômes, rationnelles et racines sont sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
Il en est de même des fonctions construites à partir de celles-ci par addition, multiplication et composition.

**Exemple 1**

La fonction $g$ définie par $g(x) = \dfrac{x^5 + x^2 + 3}{\sqrt{x}}$ sur son ensemble de définition

### 1.2 Un exemple de fonction non continue

Toutes les fonctions "usuelles" connues en classe de première sont donc continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
Il existe cependant certaines fonctions non continues, l'exemple "classique" est la fonction partie entière.

**Définition 2** -- *Fonction partie entière*

La fonction partie entière est la fonction, fréquemment notée qui à tout réel $x$ associe l'unique entier $n$ tel que :

## Exercice 1

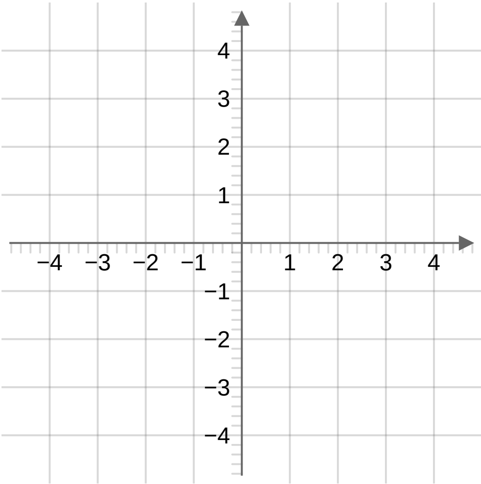
Donner la valeur des nombres suivants :

| | | |
|---|---|---|
| $E(2,1)$ | $E(2,99)$ | $E(-4,01)$ |
| $E(-\sqrt{2}\,)$ | $E(\pi)$ | $E(0)$ |

## Remarque 2

Soit $x$ un réel, $E(x)$ est le plus grand entier

Par ailleurs, comme nous pouvons le voir sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative de la fonction partie entière ressemble à un "escalier". Nous y observons des "sauts" au niveau de chacun des entiers. Nous parlons ici de



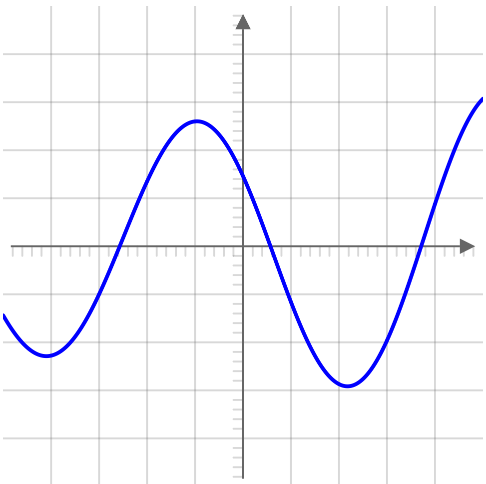

## 1.3 Propriété des fonctions continues

**Propriété 2** -- *Théorème des valeurs intermédiaires*

Soit $f$ une fonction définie et sur un intervalle $I$, et soient $a$ et $b$ deux réels de $I$.
Si $k$ est un réel compris entre les valeurs $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation admet au moins solution sur l'intervalle $I$.

## Remarque 3

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$. Alors la droite d'équation $y = k$ coupe $\mathcal{C}_f$ au moins lorsque $k$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.



## Remarque 4

Ce théorème ne permet pas de résoudre une équation, mais permet de justifier qu'une solution de cette équation existe. Généralement, on ne peut obtenir qu'un encadrement de la ou des solution(s), à l'aide par exemple de la calculatrice.

## Exercice 2

Montrer que : $x^3 + 4x^2 + 4x + 2 = 0$ admet au moins une solution sur $[-3; -1]$.

**Correction**

Soit $f$ la fonction définie sur $[-3; -1]$ par $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$.
La question posée revient à démontrer que l'équation admet au moins une solution sur $[-3; -1]$.
La fonction $f$ est sur $[-3; -1]$ en tant que fonction polynomiale. Par ailleurs,

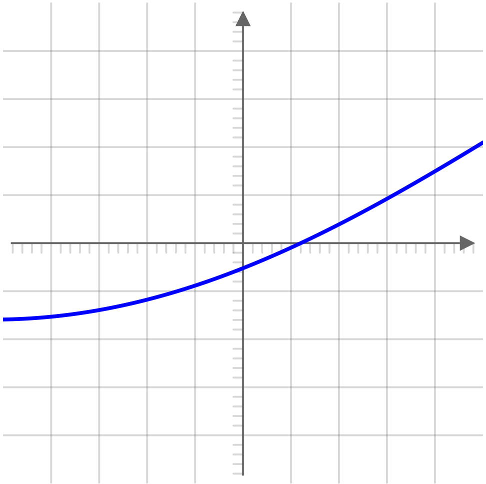
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ une solution sur l'intervalle

**Remarque 5**

Ce théorème permet donc de justifier d'une solution à une équation. Mais on ne peut pas prouver avec ce théorème de la solution à une équation. C'est l'objet du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, aussi appelé ***théorème de la bijection***.

**Propriété 3** -- *Théorème de la bijection*

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$. Si $f$ est et sur l'intervalle $[a; b]$, alors pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation admet une sur l'intervalle $[a; b]$.



**Preuve :**
Puisque $f$ est sur $[a; b]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure d'une solution $\alpha$ à l'équation sur $[a; b]$.
Il nous reste donc à prouver de cette solution.

Raisonnons par
Supposons qu'il existe un réel tel que
On alors
Et on obtient ainsi une contradiction avec le fait que $f$ est

**Remarque 6**

L'intervalle $[a; b]$ peut-être remplacé par un intervalle ouvert, semi-ouvert, et $a$ et $b$ peuvent être remplacés par $\pm\infty$

**Exercice 3**

Montrer que l'équation $x^5 + x = 1$ admet une unique solution sur $[0; 2]$.

**Correction**

On définit sur l'intervalle $[0; 2]$ la fonction $f$ par
La question posée revient donc à démontrer que l'équation admet une solution sur $[0; 2]$.

Pour tout réel $x$ de $[0; 2]$, on a : $f'(x) =$ et puisque on a

Ainsi, sur l'intervalle $[0; 2]$ :

- 
- en tant que fonction

- 

Ainsi, d'après le théorème l'équation $f(x) = 1$ admet

## 1.4 Continuité et dérivabilité

**Propriété 4**

Toute fonction sur un intervalle $I$ est sur $I$.

**Preuve**
Soient $x$ et $a$ deux réels de $I$, $x \neq a$. On a :

$$f(x) - f(a) =$$

De plus : $\lim\limits_{x \to a} (x - a) =$ et $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$ puisque $f$ est en $a$.

Ainsi :

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) =$$

Donc : $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

La fonction $f$ est bien

**Remarque 7**

La réciproque de cette propriété est En effet il existe des fonctions continues sur un intervalle qui

**Exemple 2**

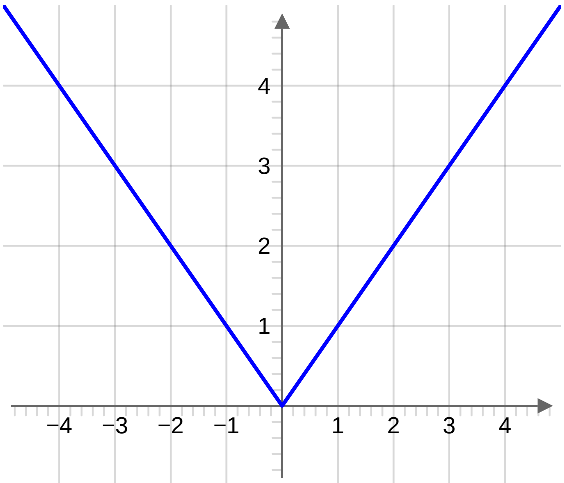
La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, mais

En effet, le taux d'accroissement en $0$ vaut :

et on a :

alors que :

Ainsi, le taux d'accroissement de la fonction valeur absolue ne possède pas de en $0$ (puisqu'on obtient deux résultats différents en s'approchant de $0$ de deux manières différentes), elle n'est donc pas en $0$ (cf définition de la dérivabilité).




*On observe un "pic" en 0. Il n'existe aucune tangente en ce point.*

## 1.5 Continuité et suites convergentes

**Propriété 5**

Soit $f$ une fonction définie sur intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, continue en $a \in I$. Soit $(u_n)$ une suite convergeant vers $a$. On a alors :

**Exemple 3**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = E(x)$.

On a d'une part : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) =$

Et d'autre part : $f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\right) =$

Ainsi, pour cette fonction $f$ qui n'est pas continue en $1$, on a :

**Propriété 6**

Soient une fonction $f$ continue sur un intervalle $I$ telle que pour tout $x \in I$, et $(u_n)$ la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout entier $n$,
Si $(u_n)$ converge vers , alors $\ell$ est une solution de l'équation

**Preuve**
On sait que :

De plus, $f$ est sur $I$, et d'après les hypothèses, pour tout entier $n$, $f(u_n)$ ainsi :

**Remarque 8**

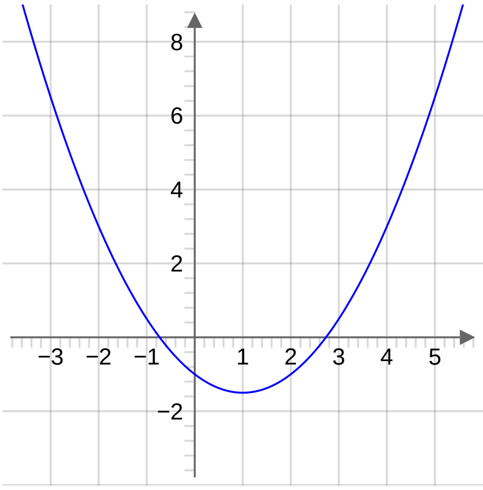
Les solutions d'une équation de la forme $f(x) = x$ s'appellent les de la fonction $f$.
Une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est pas nécessairement même si la fonction $f$ possède un point De plus, dans le cas où la suite converge vers une unique limite, il se peut que la fonction possède points fixes, dont seulement l'un des deux sera la limite de la suite.
Dans toutes ces situations ce sera le contexte et les questions de l'exercice qui permettront de conclure.

## 2 Fonctions convexes

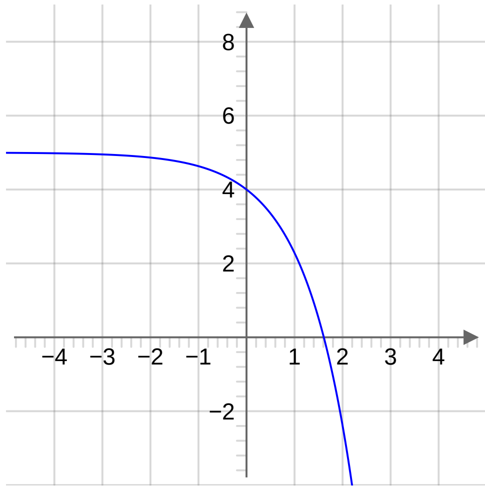
### Définition 3

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- On dit que $f$ est sur $I$, si pour tous réels $a$ et $b$ de $I$, la portion de $\mathcal{C}$ comprise entre les points est
- On dit que $f$ est sur $I$, si pour tous réels $a$ et $b$ de $I$, la portion de $\mathcal{C}$ comprise entre les points est




*Graphe d'une fonction convexe*




*Graphe d'une fonction concave*

### Remarque 9

Déterminer la d'une fonction c'est chercher les intervalles sur lesquels cette fonction est et ceux où elle est

### Exercice 4

Conjecturer graphiquement la convexité de la fonction carré, cube, racine carrée, inverse et exponentielle sur leurs ensembles de définition.

**Correction**

La fonction carrée est

La fonction cube est

La fonction racine carrée est

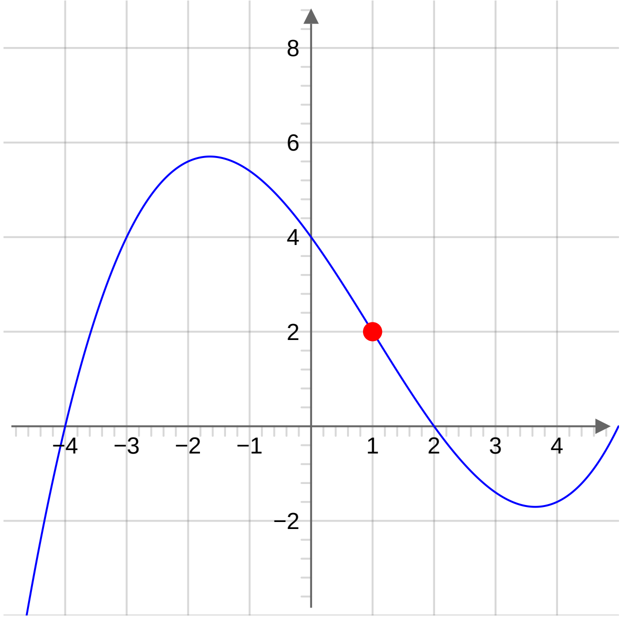
La fonction inverse est

La fonction exponentielle est

### Définition 4

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$.

Le point $A(a; f(a))$ de $\mathcal{C}$ est un de $\mathcal{C}$ si et seulement si s'annule en de signe en $a$. Graphiquement, $\mathcal{C}$ admet une tangente qui la courbe $\mathcal{C}$ en ce point $A$.




*Point d'inflexion en $x = 1$*

**Propriété 7**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

-
-
-

**Propriété 8**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

-
-
-

**Exercice 5**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$. Étudier la convexité de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Correction**

La fonction $f$ est dérivable et on a : $f'(x) =$ et $f''(x) =$
Ainsi, la fonction $f$ est

**Propriété 9**

ROC

Soit $f$ une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$.
Si $f''$ est alors la courbe représentative de $f$ est

**Preuve**

Soit $x_0 \in I$ et soit $d$ la à la courbe $\mathcal{C}$ représentant $f$ dans un repère du plan au point d'abscisse

L'équation réduite de $d$ est :

Pour déterminer la position entre $\mathcal{C}$ et $d$ on étudie le signe de :

Pour tout $x \in I$ on a

Puisque pour tout $x \in [a\,;b]$, on a et la fonction

Or, donc pour tout $x \leq x_0$ on a et pour tout $x \geq x_0$, on a

Ainsi la fonction $\delta$ est et c'est-à-dire qu'elle présente un en $x_0$.

Ce minimum vaut La fonction $\delta$ est donc et la courbe de la fonction $f$ est bien

## Exemple 4

On peut observer le résultat de cette proposition dans le graphique ci-dessus où on a tracé la courbe représentation de la fonction $f\,:\,x \mapsto \mathrm{e}^{-3x}$ de l'exercice précédent.