

# Terminale ~ Spécialité mathématiques

## Géométrie dans l'espace (2)

Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormal de l'espace.

### 1 Produit scalaire dans l'espace

#### 1.1 Définition du produit scalaire

##### Définition 1

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  deux vecteurs. Le produit de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le nombre réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  tel que :

##### Exemple 1

1. Soit  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

2. Soit  $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , alors  $\vec{u} \cdot \vec{w} =$

##### Remarque 1

Le produit scalaire apparaît dans de nombreuses situations et permettra de plus de répondre rapidement à certaines questions.

#### 1.2 Norme d'un vecteur

##### Définition 2

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  un vecteur et  $M$  un point tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ . La norme du vecteur  $\vec{u}$  est le réel positif :

##### Exemple 2

Avec les vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  de l'exemple précédent :

$\|\vec{u}\| =$  et  $\|\vec{v}\| =$

##### Définition 3

Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'espace. La distance  $AB$  est définie par la norme du vecteur

### Exemple 3

Étudions la sphère  $\mathcal{S}(A, r)$  de centre  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de rayon  $r > 0$ .

On considère un point  $M(x; y; z)$  de  $\mathcal{S}(A, r)$ . On a alors :

Or,  $\overrightarrow{AM}$  a pour coordonnées

ainsi :  $AM^2 =$

En conclusion,  $M(x; y; z) \in \mathcal{S}(A, r)$  si et seulement si :

### Exemple 4

L'équation de  $\mathcal{S}(O, 1)$ , sphère de centre  $O$  et de rayon 1 est :

## 1.3 Orthogonalité

### Remarque 2

Considérons les deux vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ , ainsi que les points  $A, B$  et  $C$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et

$\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ .

On a alors que :  $\overrightarrow{AC} =$

De plus, d'après l'équivalence de Pythagore :

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux  $\iff$

$\iff$

$\iff$

$\iff$

$\iff$

$\iff$

$\iff$

Ainsi, le produit scalaire défini dans ce cours correspond bien à celui rencontré dans le plan, cette dernière remarque amenant à la propriété suivante.

### Propriété 1

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace.  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont

### Exemple 5

Avec les vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  des exemples précédents nous avons donc :

►  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont car

►  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$

### Exercice 1

Soient  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(2; 2; 5)$  et  $C(-1; 5; 4)$ .

1. Montrer que  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur  $\vec{n} \neq \vec{0}$  orthogonal à  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .

### Correction

1.

Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont donc

2. Remarquons tout d'abord qu'il existe une  
nous en aurons trouvé un, alors tout vecteur  
 $\vec{AC}$ .

On cherche donc

On a alors :

À partir de la première égalité, on choisit

La deuxième égalité nous donne alors :

Ainsi le vecteur

et le triangle  $ABC$  est bien

de vecteurs orthogonaux à  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ . En effet, dès que  
à celui-ci sera également à  $\vec{AB}$  et

$x, y$  et  $z \in \mathbb{R}$  tel que :

convient.

### Définition 4

Soient deux vecteurs de base d'un  
la base est dite

ou trois vecteurs de base de  
et si de plus les vecteurs sont de norme 1 la base est dite

Si ces vecteurs sont  
la base est dite

Un repère orthonormé est la donnée

## 1.4 Propriétés algébriques

### Propriété 2

1. Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  :
2. Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{u}'$  et  $\vec{v}$  :
3. Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et tout  $k \in \mathbb{R}$  :
4. Pour tout vecteur  $\vec{u}$  :

### Preuve

Il suffit d'écrire explicitement les calculs en utilisant la définition du produit scalaire donnée avec les coordonnées des vecteurs.

### Remarque 3

Le point 1. décrit le caractère

du produit scalaire.

Les points 2. et 3. décrivent le caractère

par rapport à la variable de gauche du produit scalaire. Or, du fait

de la symétrie, le produit scalaire est aussi linéaire par rapport à sa variable de

Ainsi, le produit scalaire est

linéaire par rapport à ses

variables, on dit donc qu'il s'agit d'une application

### Propriété 3

1. Pour tout vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  :

2. Pour tout vecteur  $\vec{u}$  et tout  $k \in \mathbb{R}$  :

3. Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  :

4. Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  :

5. Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  :

6. Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  :

#### Preuve

Pour le point 1 nous utilisons la définition du produit scalaire et pour les points 2 et 3 la propriété précédente.

1.  $\|\vec{u}\|^2 =$

2.  $\|k\vec{u}\|^2 =$

Ainsi :  $\|k\vec{u}\| =$

3.  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 =$

4. On obtient l'égalité à partir de la précédente en changeant de membres certains termes, ou alors en remplaçant  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$  par

5. On remplace  $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$  par

6. On effectue les mêmes remplaçants que dans les deux calculs précédents.

### 1.5 Autre expression du produit scalaire

Deux vecteurs (plus un point) définissent un plan (si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas  
( ), ou une droite (si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont ( )).

Donc pour calculer le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  on peut se placer dans un plan contenant  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . On se retrouve alors à faire de la géométrie plane.

On considère trois points distincts,  $A$ ,  $B$  et  $C$  de l'espace. On note  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})$$

=

=

=

=

car  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{HC}$  sont

d'après la propriété précédente.

selon le sens de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$

Or  $\vec{AH} =$  (le donnera le signe "+" ou "-" désiré), on obtient donc la propriété suivante :

#### Propriété 4

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points de l'espace.

#### Exercice 2

Toujours avec les points  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(2; 2; 5)$  et  $C(-1; 5; 4)$ , déterminer en degré la mesure de  $\widehat{ABC}$ .

#### Correction

On calcule les coordonnées des vecteurs  $\vec{BA}$  et  $\vec{BC}$   
On a alors :

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

L'énoncé nous demande la mesure en degré de  $\widehat{ABC}$ , cela veut dire que ce n'est pas une valeur sur un intervalle de longueur mais une mesure comme au collège. Ici, on peut donc répondre en connaissant seulement le cosinus de l'angle :  $\widehat{ABC} =$

## 2 Plans et orthogonalité

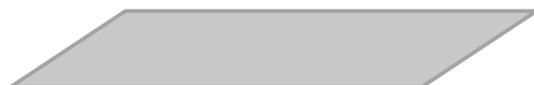
### 2.1 Vecteur normal à un plan de l'espace

#### Définition 5

Soit  $\vec{n}$  un vecteur et  $\mathcal{P}$  un plan de l'espace. On dit que  $\vec{n}$  est à  $\mathcal{P}$  ssi toute droite de vecteur directeur  $\vec{n}$  est à  $\mathcal{P}$ .

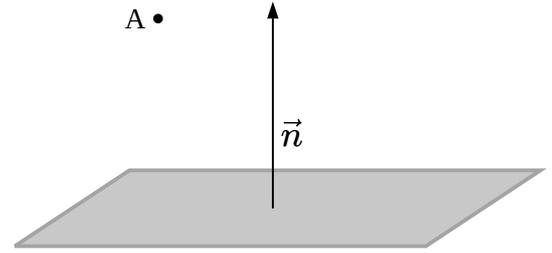
#### Propriété 5

Soit  $A$  un point d'un plan  $\mathcal{P}$  et  $\vec{n}$  un vecteur à  $\mathcal{P}$ .  
Alors le plan  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que



### Définition 6

Soit  $\mathcal{P}$  un plan de vecteur  $\vec{n}$  et  $A$  un point de l'espace.  
 Supposons  $A \notin \mathcal{P}$  et posons  $\mathcal{D} =$  la droite engendrée par  $A$  et le vecteur  $\vec{n}$ . (Cela signifie que  $\mathcal{D}$  est la droite passant par et dirigée par le vecteur ).  
 Alors le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$  est :



### Remarque 4

Si  $A \in \mathcal{P}$ , alors le projeté de  $A$  dans  $\mathcal{P}$  est

### Propriété 6

On considère un plan  $\mathcal{P}$  de l'espace ainsi qu'un point  $A$ . On note  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$ .  
 Pour tout point  $M \in \mathcal{P}$ , Ainsi, le projeté orthogonal est le point de  $\mathcal{P}$  de  $A$ .

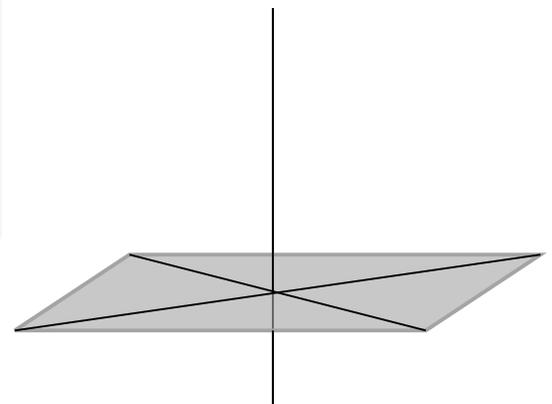
ROC

**Preuve.**

### Propriété 7

Une droite  $d$  est à toute droite d'un plan  $\mathcal{P}$  si, et seulement si, elle est orthogonale à

Réciproquement, si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont des vecteurs respectivement des droites alors :



**Preuve**

Un sens de l'équivalence est évident :

Si  $d$  est orthogonale à toute droite du plan  $\mathcal{P}$  alors elle est orthogonale à droites du plan  $\mathcal{P}$ .

puisque  $d$  est de  $\Delta$ . à  $d_1$  et à  $d_2$ .

Soit une droite du plan  $\mathcal{P}$  et  $\vec{w}$  un vecteur de  $\Delta$ .  
 Les droites  $d_1$  et  $d_2$  étant les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  et forment donc de  $\mathcal{P}$ . Il existe alors deux réels  $x$  et  $y$  tels que

On a ainsi :

On en déduit que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont et que la droite  $d$  est à la droite  $\Delta$ .

### Propriété 8

Soit  $\mathcal{P}$  un plan par deux vecteurs non colinéaires  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Soit  $\vec{n}$  un vecteur de l'espace.  
Si  $\vec{n}$  est à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  alors  $\vec{n}$  est à  $\mathcal{P}$ .

### Exemple 6

Pour les points des exercices précédents  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(2; 2; 5)$  et  $C(-1; 5; 4)$ , nous avons trouvé que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$  était orthogonal à  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ . Puisque  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires, le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$  est normal à  $\mathcal{P}$ .

## 2.2 Équation cartésienne d'un plan de l'espace

### Propriété 9

**ROC**

- Dans un repère orthonormé, un plan  $\mathcal{P}$  de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  a une de la forme : où  $d \in \mathbb{R}$  fixé.
- Réciproquement, si  $a, b, c$  ne sont pas tous les trois l'ensemble  $(E)$  des points  $M(x; y; z)$  tels que est un plan de vecteur normal

### Preuve

Soit  $A(x_0; y_0; z_0)$  un point du plan  $\mathcal{P}$  et  $M(x; y; z)$  un point de l'espace.

On a : et  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} =$

Ainsi :  $M \in \mathcal{P}$  équivaut à soit à :

c'est-à-dire :

soit en posant à :

Réciproquement, puisque  $a, b$  et  $c$  ne sont pas tous nuls, on peut supposer par exemple que  $a$  est différent de 0.

On peut vérifier que le point appartient à l'ensemble  $(E)$  et l'équation

équivaut à c'est-à-dire à

$(E)$  est donc le passant par et de vecteur normal

### Exercice 3

Avec les points  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(2; 2; 5)$  et  $C(-1; 5; 4)$ , déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .

### Correction

Nous avons vu que  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$  est un vecteur à  $(ABC)$ . Ainsi il existe un réel  $d$  tel qu'une équation cartésienne du plan soit :

Il reste à déterminer la valeur de  $d$ . Pour cela nous allons utiliser les par exemple

d'un point du plan  $(ABC)$ ,

Le plan  $(ABC)$  possède donc pour équation cartésienne :

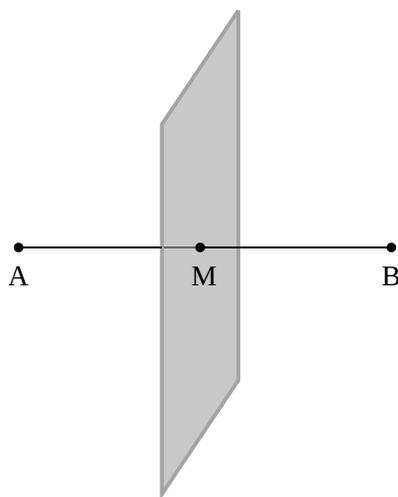
### 2.3 Plan médiateur d'un segment

#### Définition 7

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace et soit  $M$  le milieu du segment  $[AB]$ . Le plan  $\Pi$  de  $[AB]$  est le plan  $\Pi$  à  $(AB)$  passant par

#### Remarque 5

Cette définition rappelle la définition, en géométrie plane, de la



#### Exercice 4

Déterminer une équation du plan médiateur de  $[AB]$  avec  $A(0; 1; 1)$  et  $B(4; 1; 5)$ .

#### Correction

Nous savons que le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est normal au plan  $\Pi$  de  $[AB]$ , ainsi une équation cartésienne du plan médiateur est de la forme :

avec  $d \in \mathbb{R}$  à

Le milieu de  $[AB]$  de coordonnées  $(2; 1; 3)$  appartient à ce plan, ses coordonnées  $(2; 1; 3)$  l'équation du plan, et nous obtenons alors :

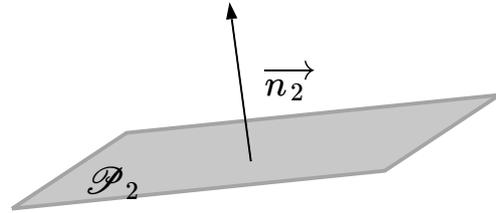
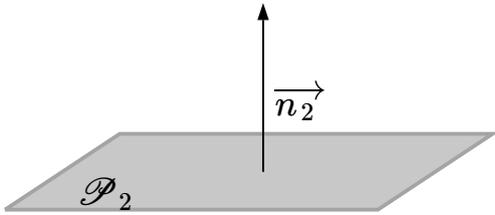
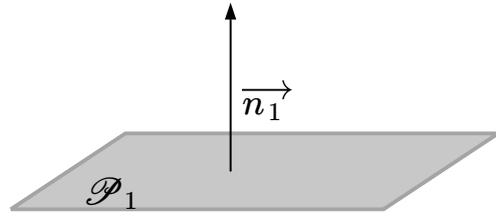
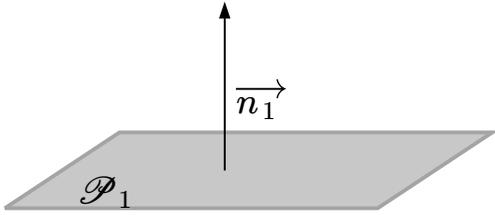
Nous trouvons donc que le plan médiateur de  $[AB]$  a pour équation cartésienne :  $x - 2y + 2z - 10 = 0$  que l'on réduit à :

#### Propriété 10

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts de l'espace. Le plan médiateur de  $[AB]$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que

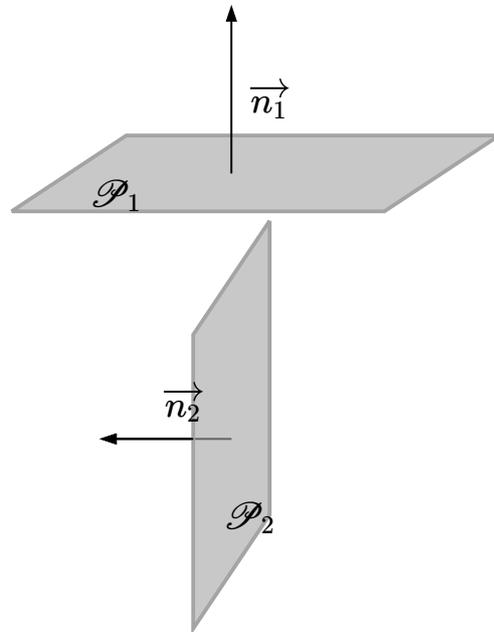
## 2.4 Position relative de deux plans

Observons quelques figures.



*Les vecteurs normaux sont colinéaires et les plans sont parallèles*

*Les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires et les plans ne sont pas parallèles*



*Les vecteurs normaux sont orthogonaux et les plans sont perpendiculaires*

### Propriété 11

Soient  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  deux plans ayant pour vecteurs normaux respectifs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ . Alors :

### Remarque 6

La contraposée de cette proposition peut être utilisée pour démontrer que deux plans

### Exercice 5

Soient  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  trois plans d'équations respectives :

- $15x + 6y + 3z = 0$ ,
- $21x + 7y - z = -4$ ,
- $-5x - 2y - z = 21$ .

Déterminer les positions relatives de  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$ .

### Correction

Soient  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  et  $\vec{n}_3$  des vecteurs des plans respectifs  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  obtenus à l'aide des équations cartésiennes.

Nous remarquons que  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_3$  sont orthogonaux et les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_3$  sont donc perpendiculaires.

Par ailleurs,  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  ne sont pas orthogonaux, mais  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_3$  sont orthogonaux. Les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  ne sont donc pas orthogonaux et les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  ne sont pas perpendiculaires.

Puisque  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_3$  sont perpendiculaires et que  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  ne sont pas perpendiculaires, alors  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  sont sécants.

### Propriété 12

Soient  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  deux plans de vecteurs normaux respectifs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ .  
les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont orthogonaux.

### Exercice 6

Avec les mêmes notations qu'à l'exercice précédent, les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont-ils perpendiculaires ?

### Correction

Les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  ont pour vecteurs normaux respectifs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ .

Calculons leur produit scalaire :

On peut alors affirmer que les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont perpendiculaires.