Terminale S - Fonctions trigonométriques

1 Rappels de trigonométrie

Nous rappelons ici quelques formules et propriétés de la classe de première qui nous seront utiles dans la suite du cours.

Valeurs remarquables

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(t)$					
$\cos(t)$					
$\tan(t)$					

Ces valeurs sont à connaître par cœur, elles seront d'ailleurs largement utilisées dans le chapitre sur les nombres complexes.

Propriété 1

Pour tous réels x :

-
-

Propriété 2

Pour tous réels x :

Propriété 3

Pour tous réels a et b on a :

-
-

Propriété 4

Pour tous réels a et b on a :

-
-
-

Preuve
On utilise les deux propriétés précédentes. Nous ne démontrerons que la première formule, les deux autres se traitant de manière similaire.

Ainsi on a bien :

Propriété 5 -- *Formules de linéarisation*

Pour tout réel x :

-
-

Preuve
Pour tout réel x on a :

Or, c'est-à-dire

La deuxième formule se démontre de manière similaire.

2 Mesure des angles et cercle trigonométrique

2.1 Mesure des angles

Il existe plusieurs unités pour mesurer les angles. L'unité la plus ancienne est le degré, mais la plus utilisée est le radian. Ces deux unités sont reliées par la formule :

Exemple 1

$90^\circ =$

$45^\circ =$

$60^\circ =$

$30^\circ =$

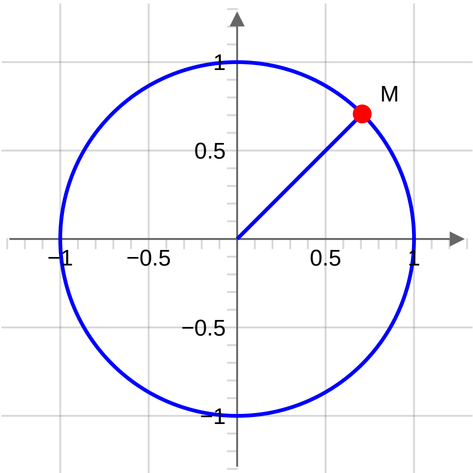
$120^\circ =$

$315^\circ =$

2.2 Cercle trigonométrique

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Ce cercle s'appelle

Pour tout point M de $\mathcal{C}$, il existe tel que les coordonnées de M soient



Question.
Pour tout point M de $\mathcal{C}$, existe-t-il un unique réel t tel que les coordonnées de M soient $(\cos(t); \sin(t))$?

Réponse.

En fait, pour chaque point M du cercle on peut trouver de réels t tel que $x_M = \cos(t)$ et $y_M = \sin(t)$, ces réels étant

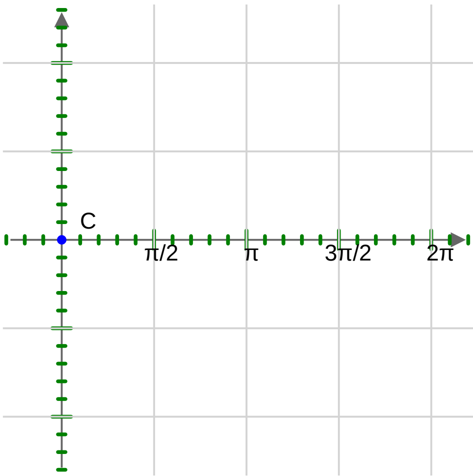
L'unicité est en fait bien obtenue si on précise que le réel t doit appartenir

3 Fonction cosinus et fonction sinus

3.1 Définitions

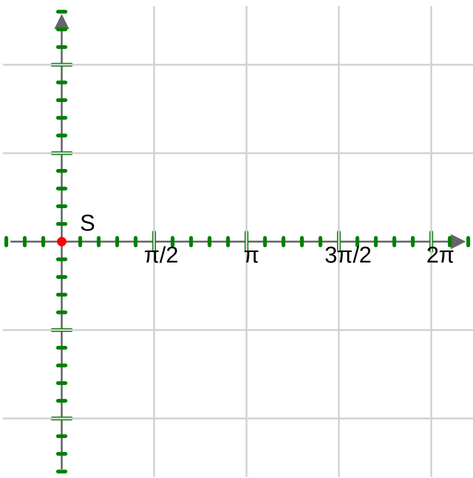
Définition 1

La fonction qui à tout nombre réel t, associe le nombre est appelée fonction



Définition 2

La fonction qui à tout nombre réel t, associe le nombre est appelée fonction



3.2 Propriétés

Propriété 6 -- *Périodicité*

Les fonctions cosinus et sinus sont

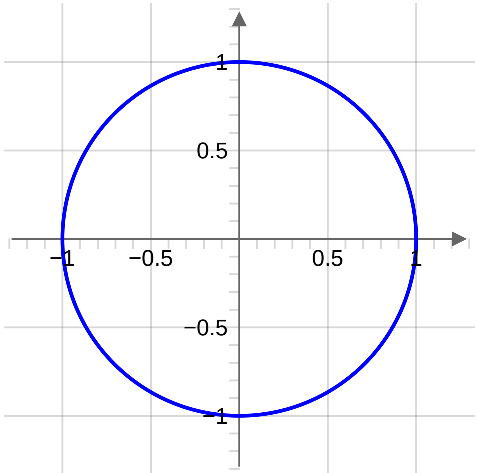
Pour tout réel x,

Pour tout réel x,

Propriété 7 -- *Parité*

Pour tout réel t,
On dit que la fonction cosinus est

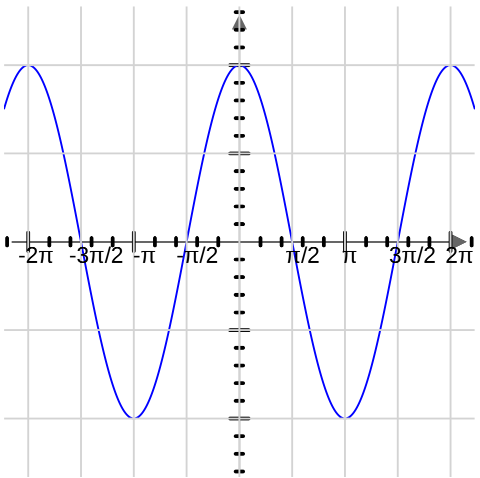
Pour tout réel t,
On dit que la fonction sinus est

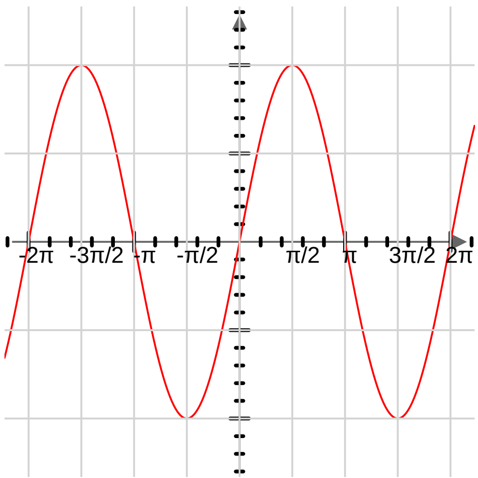


Propriété 8

○ La courbe représentative de la fonction cosinus est

○ La courbe représentative de la fonction sinus est

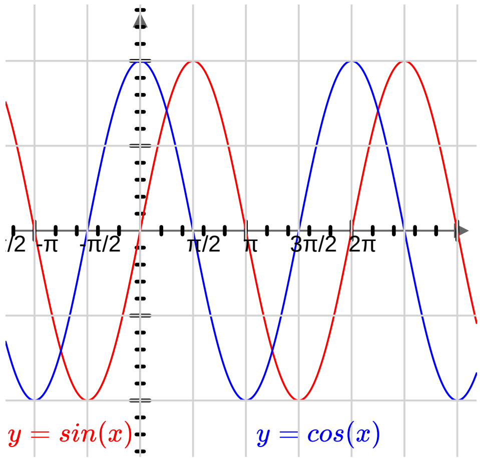




Propriété 9 -- *Déphasage*

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

On observe une translation horizontale de vecteur $\frac{\pi}{2}\ \vec{i}$ *entre les deux courbes*



Preuve

On utilise la formule avec et

on se rappelle de plus que et

On a donc :

Propriété 10

Pour tout réel x,

Pour tout réel x,

3.3 Dérivation

Propriété 11 -- *Dérivation*

○ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

○ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

Propriété 12

Soit u une fonction définie et dérivable sur intervalle I de $\mathbb{R}$.
Les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ sont et :

-
-

Exercice 1

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x^2 + 1)$.

Correction

La fonction f est de la forme avec pour tout réel x, et
Ainsi, pour tout réel x :

3.4 Signe et variations

Les fonctions sinus et cosinus étant 2π-périodiques, on peut réduire leur étude à un intervalle de longueur

x					
$\cos(x)$		0		0	

x			
$\sin(x)$		0	

Ces signes se retrouvent généralement en traçant sur son brouillon un cercle trigonométrique.
On peut de plus déduire de deux-ci le signe des fonctions dérivées donc les variations des fonctions sinus et cosinus.

4 Étude de la fonction tangente

4.1 Définition

Définition 3 -- *Fonction tangente*

La fonction tangente est la fonction notée définie pour tout par :

Son ensemble de définition est :

Remarque 1

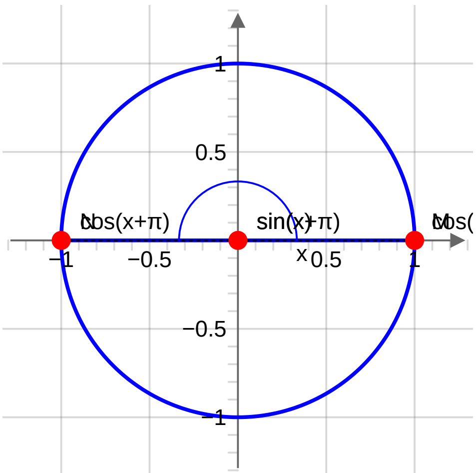
La fonction cosinus s'annulant pour l'ensemble de définition de la fonction tangente est bien $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4.2 Propriétés géométriques

Propriété 13

La fonction tangente est -périodique.

Preuve de la propriété.
Pour $x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$:



Remarque 2

Il suffit donc d'étudier la fonction tangente sur un intervalle de longueur Pour des raisons de valeurs interdites nous choisirons l'intervalle

Propriété 14

La fonction tangente est

Preuve de la propriété.
L'ensemble de définition de la fonction tangente est symétrique par rapport à et pour tout x de celui-ci, en utilisant la parité des fonctions sinus et cosinus, on obtient :

Conséquence graphique de ces propriétés.

○ Comme $\tan$ est π-périodique sa représentation graphique est

○ Comme $\tan$ est impaire sa représentation graphique dans un repère orthonormé est

4.3 Étude de la fonction

Propriété 15

La fonction tangente est sur $\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ et :

pour tout x de l'ensemble de définition.

Preuve de la propriété.

Puisque pour tout x de son ensemble définition $\tan(x) =$ nous utilisons la formule de dérivation

Propriété 16

La fonction tangente est sur chaque de son ensemble de définition.

Preuve de la propriété

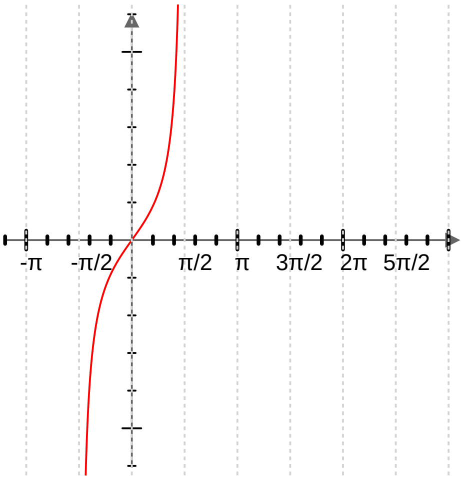
Pour tout x de l'ensemble de défintion

Ainsi, d'où le résultat.

Tableau de variation complété

Les limites s'obtiennent par   de limites, et grâce au signe de la fonction cosinus autour de $\dfrac{\pi}{2}$.

4.4 Représentation graphique



On observe les asymptotes verticales d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ainsi que la π-périodicité