

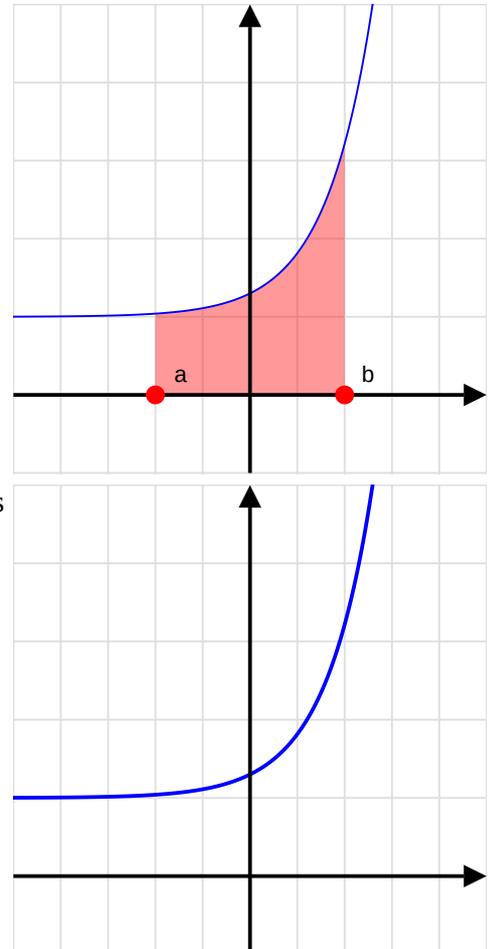
# Terminale ~ Spécialité mathématique

## Intégration

### 1 Aire sous une courbe

#### 1.1 Méthode des rectangles

Étant donnée la courbe d'une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$ , nous cherchons à approcher l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$ .



Une idée est d'approcher la valeur de cette aire en construisant plusieurs rectangles entre l'axe des abscisses et la courbe.

Nous remarquons alors, que plus le nombre de rectangles est important, plus nous nous approchons de l'aire du domaine cherchée. Cependant, ceci est une méthode itérative et nous souhaiterions obtenir des résultats théoriques, valables pour un grand nombre de fonctions.

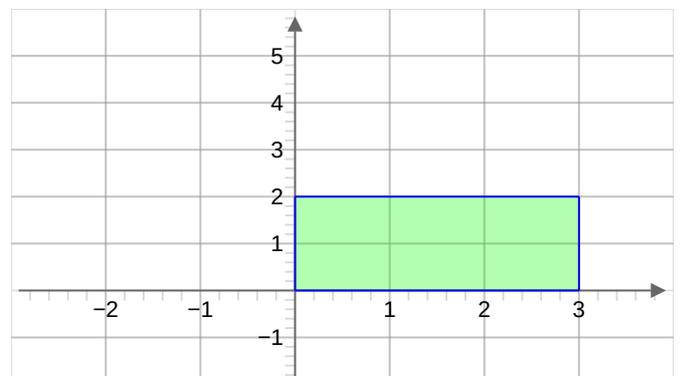
Le but de ce chapitre sera donc de déterminer les conditions (quels types de fonctions ?) pour lesquelles nous pourrions déterminer la valeur de l'aire sous une courbe, mais nous verrons également les conséquences de ces résultats que nous pourrions exploiter au delà du domaine du calcul d'aire.

#### 1.2 Calcul d'aire dans un repère orthogonal

##### Exercice 1

On se place dans le repère orthogonal ci-dessous, où l'unité sur l'axe des abscisses mesure 2 cm et celle sur l'axe des ordonnées 1 cm.

1. Déterminer la mesure en unité d'aire du rectangle construit.
2. Déterminer cette mesure en  $\text{cm}^2$ .



##### Correction

1. Ce rectangle a pour dimensions                      unités en longueur et                      unités en largeur, son aire est donc de

En comptant sur le graphique nous voyons bien que le "grand" rectangle vert est composé de six "petits"

2. Sachant que l'unité sur l'axe des abscisses mesure  $\dots$  et celle sur l'axe des ordonnées nous  $\dots$  nous avons que le rectangle mesure  $\dots$  Ainsi le rectangle considéré possède une aire de  $\dots$

et celle sur l'axe des ordonnées nous  $\dots$  nous Ainsi le rectangle considéré possède une aire de  $\dots$

### Remarque 1

On fera attention à bien faire la différence entre les unités utilisées. La démarche la plus sûre étant de calculer dans un premier temps en unité d'aire, puis de convertir dans l'unité demandée.

## 2 Définition et propriétés

### 2.1 Définition

#### Définition 1

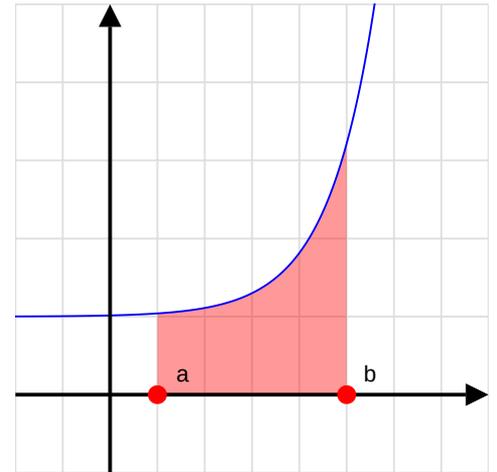
Soit  $f$  une fonction  $\dots$  et  $\dots$  sur un intervalle  $[a; b]$  (c'est-à-dire que  $\dots$ ).

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$\dots$  de  $a$  à  $b$  de  $f$  est  $\dots$  du domaine du plan compris

entre la droite d'équation  $\dots$  la courbe  $\dots$  la droite

d'équation  $\dots$  et l'axe  $\dots$  On note ce nombre :



### Remarque 2

1. Pour toute fonction  $f$  positive et continue sur un intervalle  $[a; b]$ ,  $\int_a^b f(x)dx$  est  $\dots$

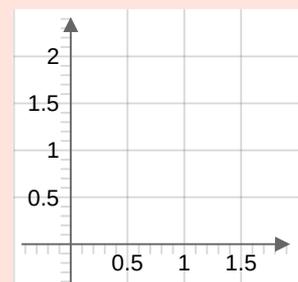
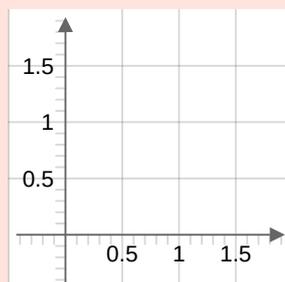
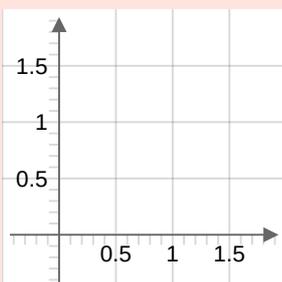
2. La variable  $x$  dans l'écriture d'une intégrale est  $\dots$  on pourrait la noter avec une autre lettre :

### Exercice 2

Déterminer la valeur des intégrales suivantes :  $\int_0^1 x dx$   $\int_0^1 1 \times dx$   $\int_0^1 (x + 1) dx$ .

#### Correction

Il nous faut construire ici les courbes représentatives des fonctions :  $\dots$  et  $\dots$  et calculer les  $\dots$  des domaines entre les  $\dots$  l'axe des  $\dots$  et les droites d'équation  $\dots$



À l'aide des formules des aires d'un triangle obtient :

d'un carré, et d'un trapèze

on

$$\int_0^1 x dx =$$

$$\int_0^1 1 \times dx =$$

$$\int_0^1 (x + 1) dx =$$

Nous remarquons ici que :  $\int_0^1 x dx + \int_0^1 1 \times dx =$   
 en imaginant que le triangle et le carré "s'ajoutent" pour former le trapèze.

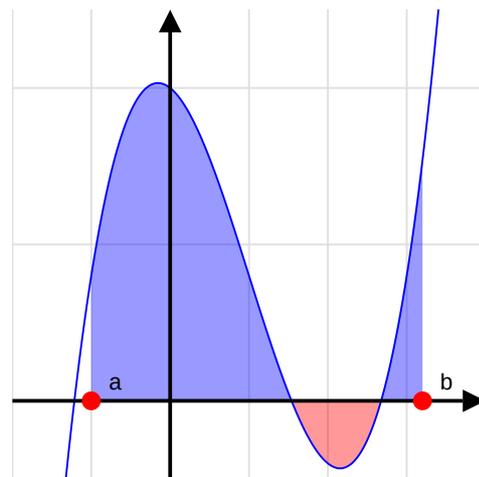
ce que l'on peut voir sur les graphiques

### Définition 2

Soit  $f$  une fonction sur un intervalle  $[a; b]$ .

On note  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Le nombre réel  $\int_a^b f(t) dt$  est l'aire du domaine du plan précédent comptée  
 lorsque  $C_f$  est de  $(Ox)$ , et  
 lorsque  $C_f$  est



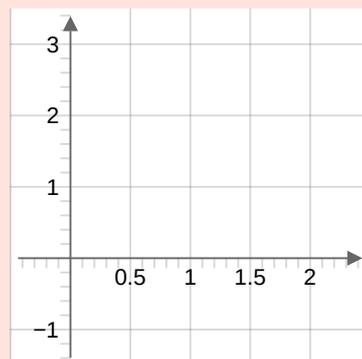
### Exercice 3

Déterminer la valeur de  $\int_0^2 (2x - 1) dx$ .

### Correction

Observons tout d'abord la courbe de la fonction

Nous voyons que la fonction s'annule en L'intégrale cherchée sera donc la  
 différence entre l'aire du triangle et l'aire du triangle



Ce résultat se vérifie en ajoutant les carreaux (ou demi-carreau) bleus et en soustrayant les rouges.

### Définition 3

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$ .

On pose alors :

### Exemple 1

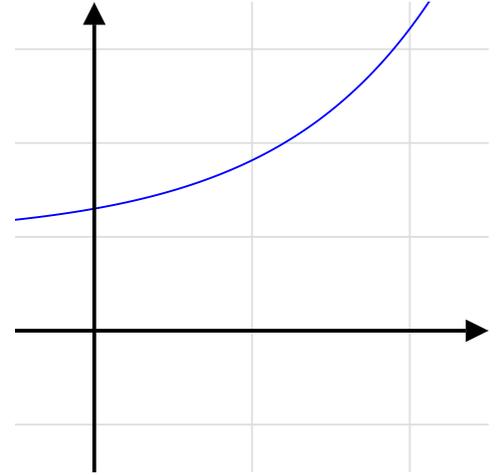
Nous avons vu que  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$  donc d'après cette définition :  $\int_1^0 x dx = -\frac{1}{2}$

### Propriété 1 -- Relation de Chasles

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et soient  $a, b$  et  $c$  des éléments de  $I$ . On a alors :

### Remarque 3

Cette propriété signifie que si on découpe un domaine en deux alors la somme des aires des deux nouveaux domaines est égale à l'aire totale.  
 Dans le graphique précédent l'aire du domaine entre  $a$  et  $c$  est égale à la somme des aires des domaines coloriés en (entre ) et en (entre ).



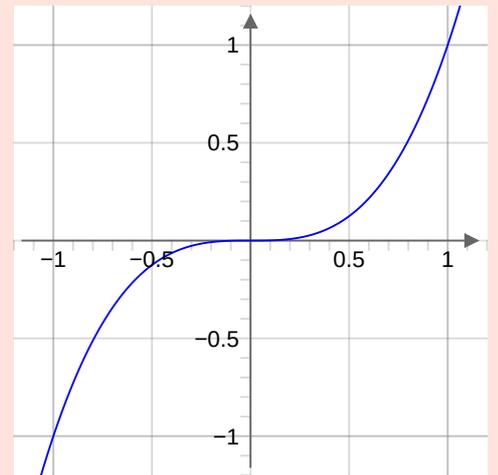
### Exercice 4

À l'aide de la relation de Chasles montrer que  $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$ .

### Correction

La fonction cube étant les aires des domaines sur  $[-1 ; 0]$  et  $[0 ; 1]$  sont du même signe.  
 En effet, la courbe étant repère les aires sont La partie de gauche de la courbe étant de l'axe des abscisses l'aire du domaine sur  $[-1 ; 0]$  est compté On a alors :

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$



### Propriété 2 -- Linéarité

Soient  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues, et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

1.

2.

## Exemple 2

Nous avons déjà vu que :  $\int_0^1 x dx + \int_0^1 1 \times dx = \int_0^1 (x + 1) dx$ .

Et pour illustrer le deuxième point, nous avons, par exemple :  $\int_0^1 5x^2 dx =$

### Propriété 3 -- Positivité

Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$ .

Si pour tout  $x \in [a; b]$ , alors

### Remarque 4

Si pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) \leq 0$ , alors  $\int_a^b f(x) dx$

En effet, si  $f(x) \leq 0$  alors  $-f(x)$  et donc :  $\int_a^b -f(x) dx$

Par linéarité nous avons alors :  $-\int_a^b f(x) dx$

Et :  $\int_a^b f(x) dx$

### Propriété 4 -- Positivité

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a; b]$ .

Si pour tout  $x \in [a; b]$ , alors

### Preuve

Pour tout  $x \in [a; b]$ , on a :

$$f(x) \leq g(x)$$

$\iff$

$\implies$

$\implies$

$\implies$

## Exemple 3

Nous avons que :  $\int_1^{10} x^2 dx$   $\int_1^{10} x^3 dx$ .

En effet sur l'intervalle  $[1; 10]$ ,  $x^2$   $x^3$ .

Nous avons également :  $\int_0^1 x^2 dx$   $\int_0^1 x^3 dx$  car sur l'intervalle  $[0; 1]$  :  $x^3$   $x^2$ .

## 2.2 Valeur moyenne d'une fonction

### Définition 4

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$ .

La valeur de  $f$  sur  $[a; b]$  est donnée par le nombre réel :

### Exercice 5

La vitesse  $v$ , exprimée en  $\text{km.h}^{-1}$  d'un véhicule est définie par  $v(t) = 20t$ , où  $t$  représente le temps exprimé en heure sur l'intervalle  $[0; 4]$ .

Déterminer la vitesse moyenne du véhicule entre 0h et 4h.

### Correction

D'après la définition précédente la vitesse moyenne du véhicule sur

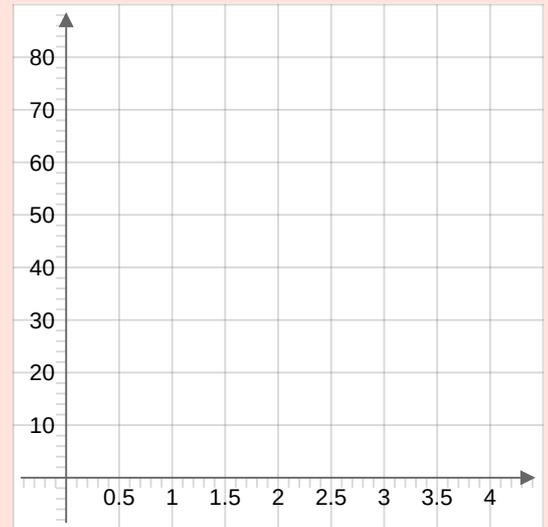
l'intervalle  $[0; 4]$  est donnée par :

Calculons l'intégrale à l'aide du graphique ci-contre.

L'aire du triangle bleu (et donc de ) vaut :

Ainsi la vitesse moyenne

cherchée vaut :



### Propriété 5

-- Inégalité de la moyenne

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$ . On considère  $m$  et  $M$  deux réels tels que : pour tout  $x \in [a; b]$ ,

On a alors :

### Remarque 5

Propriété que l'on peut traduire en disant que la valeur et la valeur de cette fonction.

d'une fonction est comprise entre la valeur

### Preuve

Pour tout  $x \in [a; b]$  :

$\implies$

$\implies$

$\implies$

### Exemple 4

Pour tout réel  $t > 0$ ,  $4 \ln(2) \leq \int_1^5 \ln(1+t) dt \leq 4 \ln(6)$ .

En effet, la fonction est sur sa dérivée étant

Cette fonction est donc par sa valeur en 1 et par sa valeur en 5. C'est-à-dire, que pour tout réel  $t \in [1; 5]$  :

Ainsi, en appliquant l'inégalité de la on obtient :

Ce qui donne :

## 3 Intégration et primitives

### 3.1 Exemple

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Déterminons  $\int_0^x t dt$ .

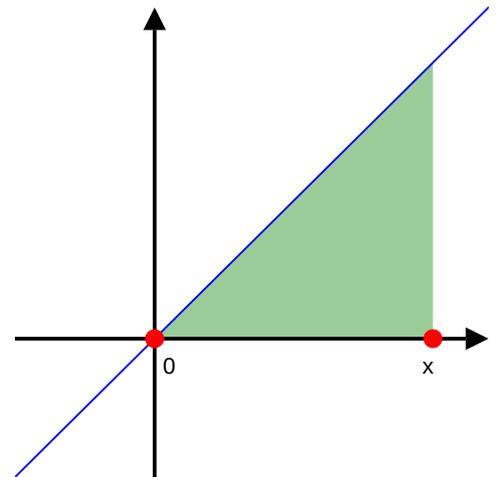
Construisons le graphique pour calculer l'aire du domaine considéré.

L'aire du domaine vaut : et donc

Nous remarquons donc, dans ce cas précis qu'il y a un lien entre la fonction dont on cherche à calculer l'intégrale, et une de cette fonction. Ici

nous avons bien que la dérivée de  $t \mapsto \frac{1}{2} t^2$  est et on se pose la

question si ce résultat peut se généraliser à toute fonction continue dont on chercherait à calculer une intégrale.



### 3.2 Intégrale et primitive

#### Propriété 6

Soit  $f$  une fonction sur un intervalle  $[a; b]$ . Alors la fonction  $F$  définie sur  $[a; b]$  par :

est sur  $[a; b]$  et a pour dérivée

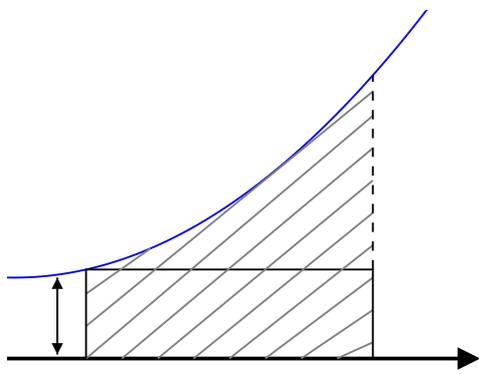
ROC

#### Preuve

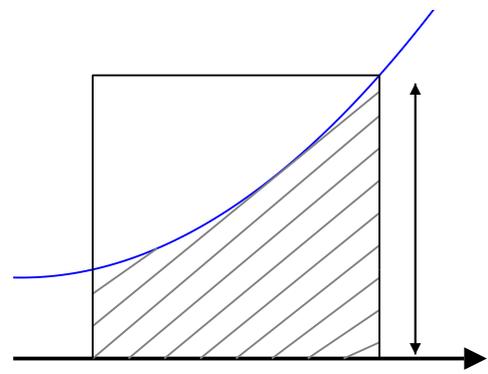
On démontre ce résultat dans le cas où  $f$  est continue, positive et Notre but est de montrer que

Nous avons :

La fonction  $f$  étant l'aire sous la courbe, , ici hachurée, est par l'aire des deux rectangles vert et bleu ci-dessous :



L'aire du rectangle vert vaut :



et celle du rectangle bleu :

On obtient donc l'encadrement suivant :

Or,

Ainsi, par

### Propriété 7

Toute fonction  $f$  continue et positive sur un intervalle admet une primitive  $F$  sur cet intervalle.

#### Preuve

La proposition précédente (la numéro 6) nous permet d'obtenir le résultat : « Toute fonction positive et continue possède une primitive sur l'intervalle ».

Il nous reste donc à démontrer le résultat pour une fonction de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{R}$ .

On admettra pour cela que sur un intervalle  $[a ; b]$ , toute fonction continue possède un minimum et un maximum.

Soit  $f$ , une fonction continue sur un intervalle  $[a ; b]$ , et

Si  $m$  est positif, alors  $f$  est positive sur  $[a ; b]$  et d'après la propriété précédente,  $f$  admet une primitive  $F$  sur  $[a ; b]$ .

Si  $m$  est négatif, on définit alors sur  $[a ; b]$  la fonction  $g$ , par  $g(x) = f(x) + m$ .

Le minimum de  $f$  étant  $m$ , celui de  $g$  est 0. Cette dernière fonction est donc positive et continue sur  $[a ; b]$  et possède une primitive  $G$  que l'on note  $F(x) = G(x) - mx$ .

On définit alors la fonction  $F$  par  $F(x) = G(x) - mx$ .

On obtient :

Ainsi, nous avons bien déterminé une primitive  $F$  pour  $f$ .

### Propriété 8

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a ; b]$ , et soit  $F$  une primitive de  $f$ . Alors :

## Preuve

D'après la propriété 7 la fonction  $G$  définie pour tout  $x \in [a; b]$  par

Ainsi, on a bien

Soit  $F$  une

### Exemple 5

Graphiquement, nous avons vu que  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ .

Une primitive de la fonction  $f : x \mapsto x$  est \_\_\_\_\_ et :

Ce résultat illustre donc la propriété.

### Remarque 6

On notera, de manière plus condensée :

#### Propriété 9

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Soit  $x_0 \in I$  fixé. Alors, la fonction  $F$  définie sur  $I$  par

est \_\_\_\_\_ de  $f$  qui

### Exemple 6

Nous avons, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  :

## 3.3 Intégration par parties

#### Propriété 10

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $[a; b]$  telles que  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $[a; b]$ . On a alors :

ROC

## Preuve

Pour tout  $x \in [a; b]$ , on a

C'est-à-dire :

Par hypothèse chacune des fonctions de l'égalité précédente sont \_\_\_\_\_ elles admettent donc des  
\_\_\_\_\_ et on peut calculer leur \_\_\_\_\_ sur  $[a; b]$ .

On a ainsi :

### Exercice 6

Calculer  $I = \int_0^{\ln(2)} x e^x dx$ .

### Correction