DM ~ Le dôme du Panthéon de Paris

Constuire un dôme a toujours était un enjeu de taille. La difficulté principale étant d'éviter l'écroulement de la structure puisqu'aucun pilier ne peut soutenir l'intérieur de la coupole.
Lorsqu'on considère une coupe verticale d'un dôme, les architectes ont fini par se rendre compte que l'équilibre serait maximal lorsque la courbe suit une chaînette inversée. C'est-à-dire la forme que prend une chaîne dont les extrémités sont tenues à la même hauteur et qui se plie face à l'action seule de la gravité. En prenant la symétrique de cette courbe vers le haut on obtient la courbe idéale que doit suivre la coupe du dôme.
Nous allons dans ce devoir tenter de déterminer l'équation de la coupe du dôme du Panthéon de Paris.

1 Étude préliminaire

Soient f et g les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{10}{x}} + \mathrm{e}^{-\frac{10}{x}} - 2 - \frac{22}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = -5\mathrm{e}^{\frac{10}{x}} + 5\mathrm{e}^{-\frac{10}{x}} + 11.$$

1. a. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
   b. Déterminer pour tout $x > 0$ l'expression de $g'(x)$.
   c. Dresser alors le tableau de variations de g sur $]0\,;+\infty[$.
   d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution φ sur $]0\,;+\infty[$.
   Déterminer un encadrement à 10^{-3} de φ et en déduire une valeur approchée à 10^{-2}.
   e. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ en fonction de φ.
2. a. On admet que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Pour tout réel $x > 0$ montrer que $f'(x) = \dfrac{2}{x^2} \times g(x)$.
   c. En déduire le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.
   d. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$.
   Déterminer un encadrement à 10^{-3} de α et en déduire une valeur approchée à 10^{-2}.

2 Application au dôme du Panthéon de Paris

Le dôme du panthéon possède un diamètre de 20 mètres et une hauteur de 11 mètres.

L'équation générale d'une chaînette inversée est de la forme : $d(t) = b - \dfrac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{a}}\right)$.

Les valeurs de a et b changent en fonction des dômes et on cherche donc à les déterminer pour celui du Panthéon de Paris.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} \geq 0$.
2. Déterminer les variations de d sur $\mathbb{R}$ et expliquer alors pourquoi $d(0) = 11$ et $d(10) = 0$.
3. À partir de l'égalité $d(0) = 11$ donner l'expression de b en fonction de a.
4. À partir de l'égalité $d(10) = 0$ et de la question précédente, montrer que a est solution de l'équation $f(x) = 0$.
5. En déduire les valeurs de a et b à 10^{-2} et construire le graphique de la courbe de la fonction d sur l'intervalle $[-10\,;10]$ dans le repère ci-dessous.