

DM ~ Probabilités

Exercice 1

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsqu'un sondage permet la découverte de vestiges, il est dit positif.

On note V_n l'événement : « le $n^{\text{ième}}$ sondage est positif » et p_n sa probabilité.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « les deuxième et troisième sondages sont positifs »;

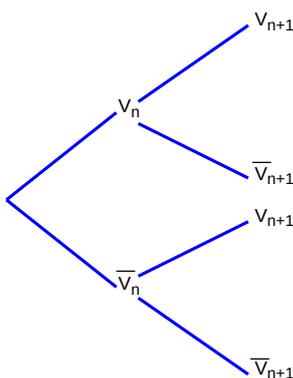
B : « les deuxième et troisième sondages sont négatifs ».

On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le troisième sondage soit positif.

3. Le nombre n désigne un entier naturel, $n \geq 2$.

a. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



b. Établir pour tout entier naturel n non nul, que $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

4. On note (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,2$.

a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer u_n , puis p_n en fonction de n .

c. Calculer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

d. Écrire un algorithme Python pour déterminer le premier entier n tel que $p_n < 0,2 - 10^{-12}$.

On pourra s'inspirer de la correction de l'exercice 1 du cours n°1.

Exercice 2

Soit b un entier naturel choisi aléatoirement entre 1 et 10.

On définit sur \mathbb{R} la fonction f , pour tout x par :

$$f(x) = (x + b)e^{-bx}.$$

1. Montrer que pour tout x , $f'(x) = (1 - b^2 - bx)e^{-bx}$.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3. Justifier que f atteint son maximum en $x = \frac{1}{b} - b$.

4. Quelle est la probabilité que f ne soit pas majorée par 1 000 ?

Exercice 3

Soient a et c deux entiers choisis aléatoirement 0 et 10.

Quelle est la probabilité que le polynôme $P(x) = ax^2 + 5x + c$ possède deux racines distinctes ?