DM ∼ Géométrie

Exercice 1 ∼ Géométrie plane

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(-3\,;2)$ et $B(5\,;-1)$.
On cherche à déterminer l'ensemble Γ des points du plan, que l'on note $\mathscr{P}$, qui vérifie :

$$\Gamma = \{M \in \mathscr{P},\ (3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = 0\}.$$

On définit de plus les points G et H par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB}$.

1. Montrer que $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et que $\overrightarrow{HA} - 2\overrightarrow{HB} = \vec{0}$.
2. En déduire que $M \in \Gamma$ si et seulement si $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$.
3. Déterminer et construire Γ.

Exercice 2 ∼ Géométrie dans l'espace

Dans un repère de l'espace on considère les points $A(1\,;-1\,;-4)$ et $B(6\,;0\,;3)$.
On définit de plus les droites d_1 et d_2 à l'aide des paramétrisations suivantes :

$$M(x;y;z) \in d_1 \iff \left\{\begin{array}{ccl} x & = & -1-2t \\ y & = & 2+3t \\ z & = & 4t \end{array}\right. \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

et

$$M(x;y;z) \in d_2 \iff \left\{\begin{array}{ccl} x & = & -8+7t' \\ y & = & 4-2t' \\ z & = & -3+3t' \end{array}\right. \quad \text{pour } t' \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer une représentation paramètrique de la droite (AB).
2. Montrer que A est un point de d_1 et B un point de d_2.
3. Montrer que les droites d_1 et d_2 sont sécantes en un point C dont on déterminera les coordonnées.
4. Soit M un point quelconque de (AB). Montrer qu'il existe un réel t tel que $CM^2 = 75t^2 - 42t + 26$.
5. En utilisant la question précédente, déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 3 ∼ Géométrie dans l'espace

Soit t un réel strictement positif.

Dans un repère orthonormé de l'espace on considère les points $A(t\,;0\,;0)$, $B\left(0\,;1+\dfrac{1}{t}\,;0\right)$ et $C\left(0\,;0\,;1+\dfrac{1}{t}\right)$.

1. Construire une figure, en faisant apparaître le tétraèdre $OABC$, pour $t = 2$.
2. Pour quelle valeur de t le volume de $OABC$ est-il minimal ?