DM ~ Convexité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x)=x^2-6x+4\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
2. a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel $x\in]0\,;+\infty[$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   En déduire le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4\,;5]$.
4. On admet que, pour tout $x\in]0\,;+\infty[$, on a : $f''(x)=\dfrac{2x^2-4}{x^2}$.
   a. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
   On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
   b. On note A le point de coordonnées $\left(\sqrt{2}\,;f(\sqrt{2})\right)$.
   Soit t un réel strictement positif tel que $t\neq\sqrt{2}$. Soit M le point coordonnées $(t\,;f(t))$.
   En utilisant la question 4.a, indiquer, selon la valeur de t, les positions relatives du segment $[AM]$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.