Terminale ~ Spécialité mathématique
Livret de révision

1 Suites numériques

Exercice 1 ★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 200$.

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.
2. a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n > 4\,000$.
   b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.
3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par: $v_n = u_n - 4\,000$.
   a. Calculer v_0.
   b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n$.
   d. Quelle est la limite de la suite (v_n) ? Justifier la réponse.
4. En 2020, une espèce animale comptait $10\,000$ individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.
   Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.
   Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population » .
   Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

Exercice 2 ★

On s'intéresse au développement d'une bactérie.
Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité $0,3$ de mourir sans descendance et une probabilité $0,7$ de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.
Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2 .$$

	A	B
1	n	p_n
2	0	$0,3$
3	1	
4	2	
5	3	$0,407\,695\,62$
6	4	$0,416\,351$
7	5	$0,421\,343\,71$
8	6	$0,424\,271\,37$
9	7	$0,426\,004\,33$
10	8	$0,427\,035\,78$
11	9	$0,427\,651\,69$
12	10	$0,428\,020\,18$
13	11	$0,428\,240\,89$
14	12	$0,428\,373\,18$
15	13	$0,428\,452\,51$
16	14	$0,428\,500\,09$
17	15	$0,428\,528\,63$
18	16	$0,428\,545\,75$
19	17	$0,428\,556\,02$

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)
   a. Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.
   b. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?
   c. Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).
2. a. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.
   b. Justifier que la suite (p_n) est convergente.
3. On appelle L la limite de la suite (p_n).
   a. Justifier que L est solution de l'équation

$$0,7x^2 - x + 0,3 = 0.$$

   b. Déterminer alors la limite de la suite (p_n).
4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

```
1 def suite(n):
2     p = ...
3     s = [p]
4     for i in range(...):
5         p = ...
6         s.append(p)
7     return s
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction *suite (n)* retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

Exercice 3 ★★

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à $12\,000$ individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les $60\,000$ individus.

Partie A : un premier modèle
Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5% par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016+n$. On a donc $v_0=12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle
Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0=12$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}=-\dfrac{1,1}{605}u_n^2+1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-\dfrac{1,1}{605}x^2+1,1x$.
   a. Justifier que g est croissante sur $[0;60]$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x)=x$.
2. On remarquera que $u_{n+1}=g\left(u_n\right)$.
   a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 55$.
   c. En déduire la convergence de la suite (u_n).
   d. Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell)=\ell$.
   En déduire la valeur de ℓ et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3.

   Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les $50\,000$ individus avec ce second modèle.
   Il utilise l'algorithme incomplet ci-contre.
   Compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r\ \geq\ 50$.

```
n = 0
u = 12
while ...
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

Exercice 4 ★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=-1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0,9u_n-0,3$.

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N},\ u_n=2\times 0,9^n-3$.
   b. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N},\quad -3<u_n\leqslant -1$.
   c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
   d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\ ;\ -1]$ par : $g(x)=\ln(0,5x+1,5)-x$.
   a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)

x	-3		-2		-1
	‖		$g(-2)$		
$g(x)$	‖	↗		↘	
	‖ $-\infty$				1

   b. En déduire que l'équation $g(x)=0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.
3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $\in\mathbb{N}$, par : $v_n=\ln\left(0,5u_n+1,5\right)$.
   a. En utilisant la formule donnée à la question **1. a.**, démontrer que la suite v est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.
   b. Soit n un entier naturel.
   Démontrer que $u_n=v_n$ si, et seulement si $g\left(u_n\right)=0$.
   c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k\in\mathbb{N}$ pour lequel $u_k=\alpha$.
   d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k\in\mathbb{N}$ pour lequel $v_k=u_k$.

Exercice 5 ★★

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses $5\,000$ collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0=200$.

Partie A

1. Calculer a_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel $n,\ a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. \item On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par: $v_n = a_n - 3\,000$.
    a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
    b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
    c. En déduire que, pour tout entier naturel $n,\ a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à $2\,500$, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B
Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
    b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

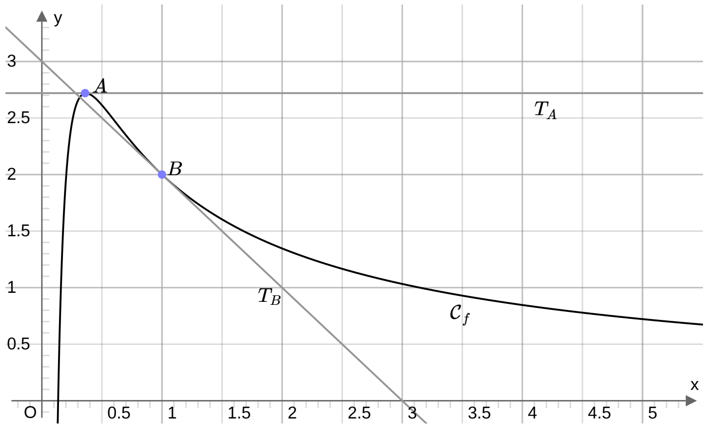
2 Fonctions

Exercice 6 ★

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$;
- la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\mathrm{e}\right)$;
- la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

Partie I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie II
On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2+\ln(x)}{x}$.

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f. On admet que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3}$.
Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

6. Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2(x) + 2\ln(x)$.
   a. Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
   b. Peut-on affirmer que F est concave sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$?
   c. Déterminer la primitive de f qui s'annule en e.

Exercice 7 ★

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et f' la fonction dérivée de f.

1. a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$.
   b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.
   b. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.
3. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = x+1$.
4. L'objectif de cette question est de déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.
À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu, pour tout réel x, l'expression et le signe de $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f.

	Instruction	Réponse
1	f(x)=x*exp(-x)+1	$x\mathrm{e}^{-x}+1$
2	g(x)=Dériver(Dériver(f(x)))	$\mathrm{e}^{-x}(x-2)$
3	Résoudre(g(x) >= 0)	$x \geq 2$

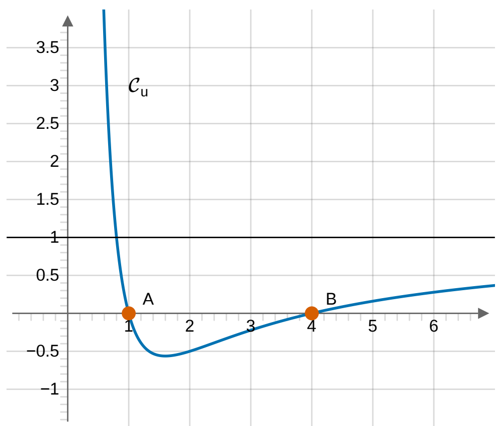
   a. Déterminer le sens de variation de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction est convexe puis celui sur lequel elle est concave.
   c. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2]$.
5. On souhaite maintenant déterminer la primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
On admet qu'il existe a, b et c tels que pour tout réel x, $F(x) = \mathrm{e}^{-x}(ax+b) + cx + d$.
   a. Déterminer l'expression de $F'(x)$ en fonction de a, b et c.
   b. Justifier alors que $a = b = -1$ et $c = 1$.
   c. En déduire la valeur de d et donner l'expression algébrique de $F(x)$.
   d. La courbe $\mathcal{C}_F$ représentative de F admet-elle une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?
   Justifier la réponse.

Exercice 8 ★★

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par $\mathcal{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
$u(x) = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$ où a, b et c sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_u$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$.
On précise que la courbe $\mathcal{C}_u$ passe par les points A(1;0) et B(4;0) et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathcal{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_u$.



1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.

3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - 5\ln x - \dfrac{4}{x}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.
   En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Exercice 9 ★

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Exercice 10 ★★

Partie I

On considère l'équation différentielle : (E) : $\; y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
   Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle (E') : $\; y' + y = 0$.
   Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie II

Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer. On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

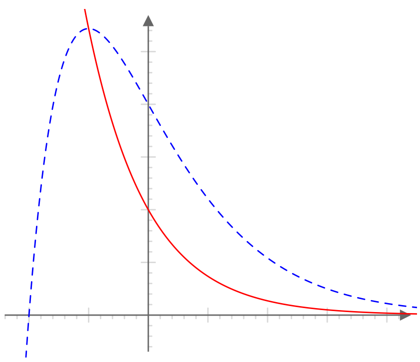
$$f_k(x) = (x+k)\mathrm{e}^{-x}.$$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$. On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal et C la courbe représentative de la fonction h.

On a représenté sur le graphique en annexe les courbes C_k et C sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes.

1. Sur le graphique en annexe à rendre avec la copie, l'une des courbes est en traits pointillés, l'autre est en trait plein. Laquelle est la courbe C ?
2. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k et placer sur l'annexe à rendre avec la copie l'unité sur chacun des axes du graphique.

Annexe



Exercice 11 ★★★

Partie I

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par : $f_n(x) = x^n\mathrm{e}^x$. On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par : $I_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

1. a. On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0;1]$ par : $F_1(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$.
   Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1.
   b. Calculer I_1.

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout n supérieur ou égal à 1 , $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.
3. Calculer I_2.
4. On considère la fonction *mystere* écrite dans le langage Python :

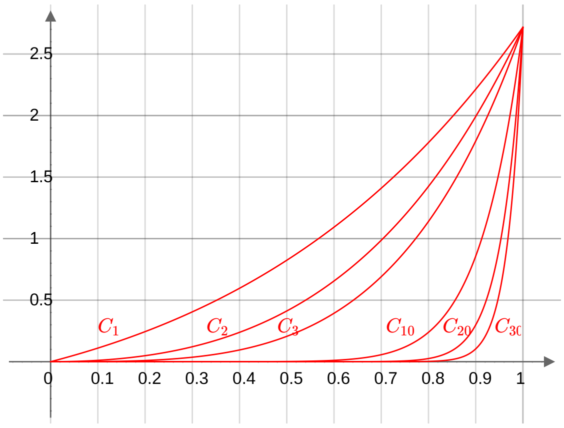
```

from math import e # la constante d'Euler e
def mystere(n):
    a = 1
    L = [a]
    for i in range(1,n):
        a = e - (i + 1)*a
        L.append(a)
    return L
```

À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel *mystere(5)*.

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$ et C_{30}.



   a. Donner une interprétation graphique de I_n.
   b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?
2. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1, $0 \leq I_n \leq \mathrm{e}\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$.
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

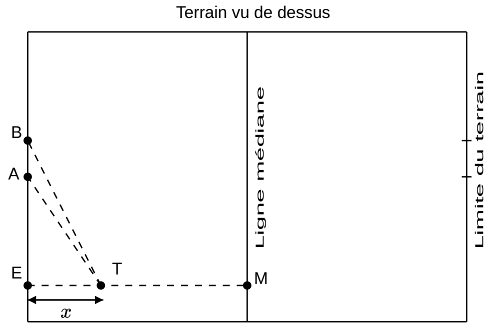
Exercice 12 ★★★

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
On définit la fonction h sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.
Les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

1. Montrer que pour tout réel θ, $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$
2. Conjecturer:
   a. les limites des fonctions f et g en $+\infty$;
   b. la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$;
   c. la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est maximal.
3. Justifier que $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
5. a. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.
   b. Justifier que, sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$.
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.
6. On admet que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction H définie par $H(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2 + \cos(x) - \sin(x)]$ est une primitive de la fonction h.
   On note $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$.
   Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.

Exercice 13 ★★★

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment $[AB]$.
La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

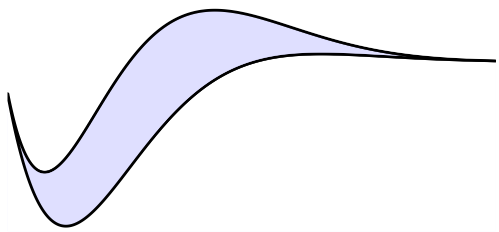


Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.
Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.
Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50$ m, $EA = 25$ m et $AB = 5,6$ m . On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.
   La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.
   On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.
   Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2+765}$.
4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\ ;\ 50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.
   Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à $0,01$ radian près.

Exercice 14 ★★★

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt:



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A — Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
   a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.
   b. En déduire les variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

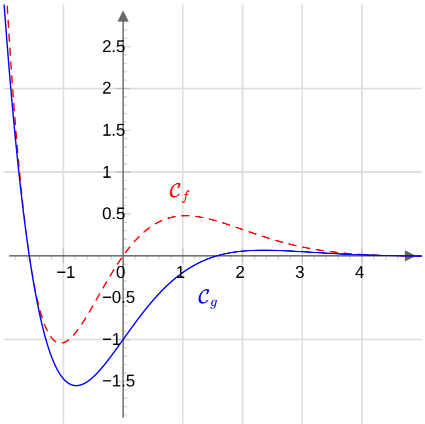
Partie B — Aire du logo

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

1. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right) \mathrm{e}^{-x}$. On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_g$ est les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
   a. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.
   b. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2.

Annexe



Exercice 15 ★★★

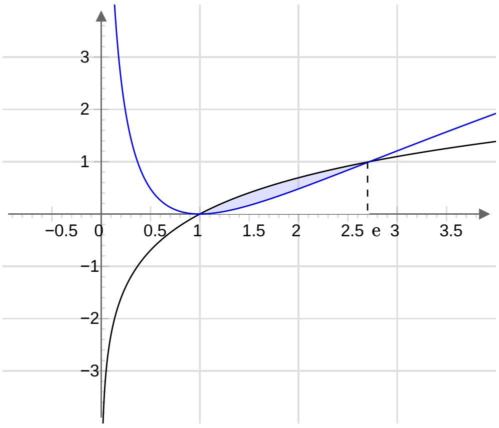
On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \,\mathrm{d}t.$$

1. a. Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
   b. Étudier les variations de la suite (x_n).
   c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   b. En déduire la limite de la suite (x_n).
3. a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.
   b. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n y_n$.

Exercice 16 ★★★

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.



1. On cherche à déterminer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan coloriée.
   On note $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$.
   a. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.
   b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \mathrm{e} - 2I$.
   c. En déduire J.
   d. Donner la valeur de $\mathcal{A}$.
2. Pour x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ e]$, on note M le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et N le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ de même abscisse.
   Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

Exercice 17 ★

On s'intéresse à la clientèle d'un musée.
Chaque visiteur peut acheter son billet sur internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée.
Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée. Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur internet. Une étude est réalisée. Elle révèle que:
• 70 % des clients achètent leur billet sur internet;
• parmi les clients achetant leur billet sur internet, 35 % choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide ;
• parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55 % choisissent une visite avec un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée. On considère les évènements suivants :
• A : "Le client choisit une visite avec un audioguide ";
• B : "Le client achète son billet sur internet avant sa visite".

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le client choisisse une visite avec un audioguide est égale à $0,41$.
3. On s'intéresse aux clients qui visitent le musée avec un audioguide.
   Si plus de la moitié d'entre eux ont acheté leur billet sur internet alors le directeur proposera à l'avenir la location de l'audioguide sur le site internet du musée.
   D'après les résultats de cette étude, que va décider le directeur? Justifier la réponse.
4. On observe un échantillon de 50 visiteurs. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de visiteurs ayant choisi une visite avec audioguide dans cet échantillon.
   a. Quelle loi de probabilité suit la variable X ?
   b. Déterminer $E(X)$ l'espérance de X.
   c. Déterminer $P(X \geq 25)$.

Exercice 18 ★★

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

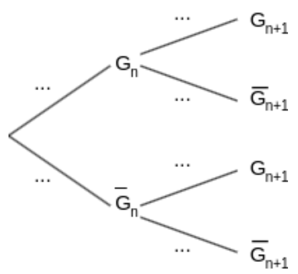
- G_n l'évènement " le joueur gagne la n-ième partie " ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.
Partie A - Les premières parties

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

Partie B - Un grand nombre de parties

1. Compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_n = p_n - \frac{3}{4}$.
   a. Déterminer la nature de la suite (u_n) et en déduire que pour tout entier n : $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
   b. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 19 ★★

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation avec conduite accompagnée ;
- la formation traditionnelle.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec conduite accompagnée; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation traditionnelle; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.
On considère les événements suivants :
A : «la personne a suivi une formation avec conduite accompagnée» ;
R_1 : «la personne a réussi l'examen à la première présentation» ;
R_2 : «la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation» ;
R_3 : «la personne a réussi l'examen à la troisième présentation».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
   Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.
2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec conduite accompagnée et réussi l'examen à sa deuxième présentation.
   b. Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\dfrac{1}{3}$.
   c. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec conduite accompagnée ?
3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite. Ainsi, $\{X = 1\}$ correspond à l'événement R_1.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.
   On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\dfrac{1}{6}$.
   a. Dans le contexte de cette question, préciser un événement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.
   On considère la fonction Python *seuil* ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.

```python
def seuil(p):
    n = 1
    while 1-(5.0/6)**n <= p:
        n = n+1
    return n
```

   b. Quelle est la valeur renvoyée par la commande *seuil(0.9)* ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 20 ★★

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs : rouge, vert, bleu. Tous les secteurs sont équiprobables, quel que soit le lancé.
Un joueur lance la roue.

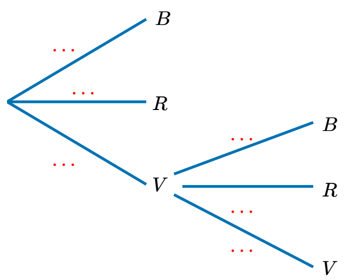
- Si le bleu sort, il perd 3 euro.
- Si le rouge sort il gagne 6 euro.
- Si il tombe sur du vert il relance la roue et :
  - si le vert sort il ne gagne rien.
  - si le rouge sort il gagne 1 euro.
  - si le bleu sort il perd 2 euro.

On note :

- V l'évènement : « le joueur tombe sur le secteur vert »,
- R l'évènement : « le joueur tombe sur le secteur rouge »,
- B l'évènement : « le joueur tombe sur le secteur bleu ».

Partie A
la roue se compose de 12 secteurs : 3 rouges, 5 verts et 4 bleus.

1. a. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous pour qu'il représente l'expérience aléatoire.
   b. Calculer la probabilité d'obtenir, à la fin du jeu, un secteur bleu.
2. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.
   a. Calculer $P(X = -3)$ et $P(X = -2)$.
   b. Donner la loi de probabilité de X.
   c. Est-il intéressant de jouer à ce jeu ?



Partie B
La roue se compose maintenant de 3 secteurs rouges, 4 secteurs bleus et n secteurs verts, n étant un entier naturel non nul.
Soit X_n la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

1. Montrer que pour tout entier n, $E(X_n) > 0$?
2. Le gérant de la loterie décide de rendre payant la participation à son jeu.
   Pour une participation de 2 euros, existe-t-il une valeur de n pour laquelle le gain moyen du gérant soit inférieur à $0,30$ euros par partie ?

Exercice 21 ★

Un producteur conditionne 40 pommes par caisse. Les masses des pommes de sa production, exprimées en grammes, sont réparties de la façon suivante :

Masse	148	149	150	151	152
Fréquence	$0,13$	$0,25$	$0,28$	$0,23$	$0,11$

On note X la variable aléatoire qui à une pomme choisie au hasard dans la production associe sa masse.
La production est suffisamment importante pour considérer qu'une caisse de 40 pommes est un échantillon de taille 40 de la loi de X.
On note S la variable aléatoire associée à la masse d'une caisse choisie au hasard.

1. Calculer l'espérance et l'écart-type de X. On les notera respectivement $E(X)$ et $\sigma(X)$ et les résultats seront arrondis à 10^{-2}.
2. Même question pour la variable aléatoire S.
3. Montrer que $P(S \in [5\,947,6\,;\,6047,6]) \geq 0,977$.

Exercice 22 ★★

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie I

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.
Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.
On considère que :

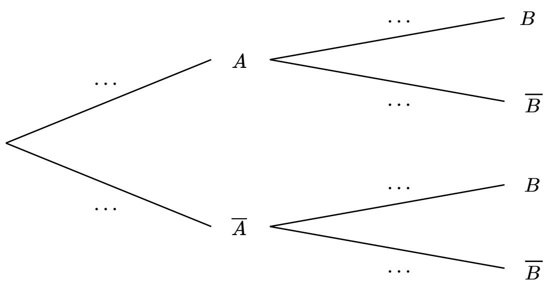
- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 »;
- B l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et de B.

1. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.
3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.
   On note :
   - X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1 ;
   - X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2 ;
   - X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.
4. Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2. En déduire l'espérance de X. Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.
5. On souhaite déterminer la variance de X.
   a. Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. En déduire $P(X = 1)$.
   b. Montrer que la variance de X vaut 0,57.
   c. A-t-on $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$? Est-ce surprenant ?

Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.
Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.
Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\dfrac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.
On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la valeur exacte de $P(Y = 8)$.
3. Donner l'espérance et la variance de Y.

Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z.
2. Soit n un nombre entier strictement positif.
   Pour i entier variant de 1 à n, on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.
   On admet que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sont identiques à Z et indépendantes.
   On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire :
   $$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n}$$
   a. Quelle est l'espérance de M_n ?
   b. Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?
   c. Pour les valeurs trouvées en **b.**, montrer que la probabilité que $6,3 \leqslant M_n \leqslant 8,3$ est supérieure ou égale à 0,75.

Exercice 23 ★★

Dans une usine de conditionnement de lait, une chaîne de production remplit des bouteilles d'un volume théorique d'un litre.
Des relevés statistiques ont permis de montrer que les bouteilles contiennent, au centilitre près, les volumes suivant :

Volume en cL	997	998	999	$1\,000$	$1\,001$	$1\,002$	$1\,003$
Fréquence	$0,11$	$0,21$	$0,22$	$0,18$	$0,13$	$0,08$	$0,07$

On définit la variable aléatoire X qui à toute bouteille choisie au hasard dans la production, associe son volume en centilitres.
On estime que la production est suffisamment importante pour que le choix d'une bouteille soit assimilé à un tirage avec remise.
Soit n un entier naturel non nul. On constitue un échantillon de n bouteilles dont on note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les volumes.
On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de loi de X.
On note $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ la variable aléatoire somme de l'échantillon $(X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n)$.
On définit enfin la variable aléatoire A_n qui donne la masse en kilogrammes de l'échantillon constitué des n bouteilles.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} dans l'ensemble de l'exercice.

1. Compléter l'algorithme suivant pour que la fonction *esp* retourne la valeur de l'espérance de X et *sigma* la valeur de l'écart-type de X.

```python
from math import*
def esp(valeurs,probas):
    n = len(valeurs)
    e = 0
    for i in range(0,n):
        e = e+...
    return e

def sigma(valeurs,probas):
    n = len(valeurs)
    v = 0
    e = esp(valeurs,probas)
    for i in range(0,n):
        v = v+probas[i]*(...)**2
    s = ...
    return s

valeursX = [997, 998, 999, 1000, 1001, 1002, 1003]
freqX = [0.19, 0.23, 0.21, 0.17, 0.09, 0.06, 0.05]
print(esp(valeursX,freqX))
print(sigma(valeursX,freqX))
```

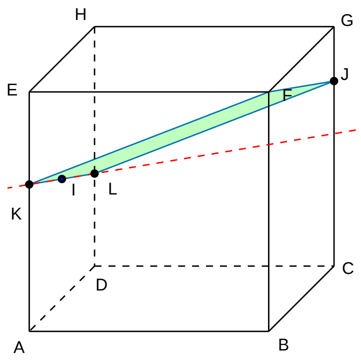
2. Donner, à 10^{-1} près, les valeurs de l'espérance de X, notée $E(X)$, et de son écart-type $\sigma(X)$.
3. En déduire $E(S_n)$ et $\sigma(S_n)$.
4. Sachant que la masse volumique du lait est de $1\,030$ g/L, déterminer $E(A_n)$ et $\sigma(A_n)$.
5. Déterminer la plus grande valeur de n pour que $\sigma(A_n)$ soit inférieur à 100 grammes.
6. Pour la valeur de n déterminée dans la question précédente, montrer que la probabilité que $A_n \in [2\,689,2;\ 3\,985,2]$ est supérieure à $0,75$.

4 Géométrie dans l'espace

Exercice 24 **

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le centre de la face $ADHE$ et J est un point du segment $[CG]$.
Il existe donc $a \in [0\,;1]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG}$.
On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).
On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).
On se place dans le repère $\left(A\,; \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

Partie A : Dans cette partie $a = \dfrac{2}{3}$



1. Donner les coordonnées des points F, I et J.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
3. a. Montrer que le point de coordonnées $\left(0\,;0\,;\dfrac{2}{3}\right)$ est le point K.

   b. Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites (d) et (DH).
4. a. Démontrer que le quadrilatère $FJLK$ est un parallélogramme.

   b. Démontrer que le quadrilatère $FJLK$ est un losange.

   c. Le quadrilatère $FJLK$ est-il un carré ?

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $K\left(0\,;0\,;1-\dfrac{a}{2}\right)$ et $L\left(0\,;1\,;\dfrac{a}{2}\right)$.

On rappelle que $a \in [0\,;1]$.

1. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.
2. Montrer que le quadrilatère $FJLK$ est un parallélogramme.
3. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère $FJLK$ soit un losange ? Justifier.
4. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère $FJLK$ soit un carré ? Justifier.

Exercice 25 ★★

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Les questions sont indépendantes.

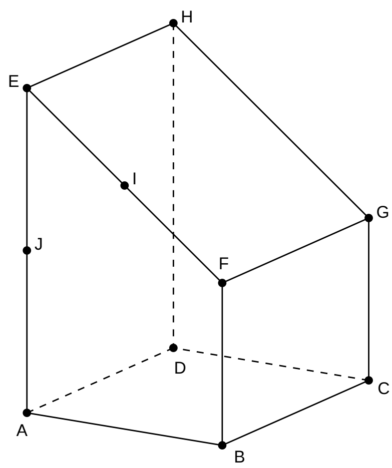
On considère le prisme droit $ABFEDCGH$ tel que $AB = AD$.

Sa base $ABFE$ est un trapèze rectangle en A, vérifiant $\overrightarrow{BF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

On note I le milieu du segment $[EF]$.
On note J le milieu du segment $[AE]$.

On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ tel que :

$\vec{i} = \overrightarrow{AB}$; $\quad \vec{j} = \overrightarrow{AD}$; $\quad \vec{k} = \overrightarrow{AJ}$



1. On donne les coordonnées de quatre vecteurs dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Lequel est un vecteur normal au plan (ABG) ?

   a. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ b. $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ c. $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ d. $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
2. Parmi les droites suivantes, laquelle est parallèle à la droite (IJ) ?

   a. (DG) b. (BD) c. (AG) d. (FG)
3. Quels vecteurs forment une base de l'espace ?

   a. $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CG}\right)$ b. $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}\right)$ c. $\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DG}\right)$ d. $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CG}\,;\overrightarrow{CE}\right)$
4. Une décomposition du vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme somme de plusieurs vecteurs **deux à deux orthogonaux** est :

   a. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG}$
   b. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ}$
   c. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JG}$

d. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$

5. Le volume du prisme droit $ABFEDCGH$ est égal à :

a. $\dfrac{5}{8}$ b. $\dfrac{8}{5}$ c. $\dfrac{3}{2}$ d. 2

Exercice 26 ★

On se place dans un repère orthonormée de l'espace et on considère le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est :

$$2x - y + z = 4.$$

On considère de plus les points $A(6\,;-1\,;3)$, $B(0\,;0\,;4)$, $C(2\,;-1\,;-1)$ et $D\left(\dfrac{5}{2}\,;0\,;-1\right)$.

On note d la droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par A.

1. Déterminer lesquels des points A, B, C et D appartiennent à $\mathscr{P}$?
2. Quelle est la nature du triangle BCD ?
3. Donner une paramétrisation de d.
4. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonale de A sur $\mathscr{P}$.
5. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 27 ★★

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC},\,\overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).
   a. Donner les coordonnées des points D et F.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
   d. Calculer les coordonnées du point H.
   e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.
2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
   a. Démontrer que $ME^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.
   b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
   En déduire que $ME\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
   c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
   En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.
   d. Conclure.

Exercice 28 ★★

Dans un repère de l'espace on considère le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est : $x - 2y + z = 5$.
On considère de plus le point $A(5\,;0\,;-6)$ et $B(1\,;-2\,;0)$.

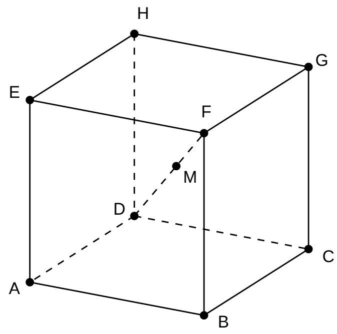
1. Justifier que le point B appartient à $\mathscr{P}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire à $\mathscr{P}$ et passant par A.
3. Déterminer les coordonnées de C intersection de d et $\mathscr{P}$.
4. Soit M un point de d. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\cos\left(\overrightarrow{MB}\,,\overrightarrow{MC}\right) = \sqrt{\dfrac{6t^2 - 12t + 6}{6t^2 - 12t + 56}}$.
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \dfrac{6t^2 - 12t + 6}{6t^2 - 12t + 56}$.

   Que peut-on en déduire pour l'angle $\left(\overrightarrow{MB}\,,\overrightarrow{MC}\right)$ lorsque M s'éloigne de C ?

Exercice 29 ★★

On considère un cube $ABCDEFGH$ dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.

Les arêtes sont de longueur 1. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA},\,\overrightarrow{DC},\,\overrightarrow{DH}\right)$.



Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).

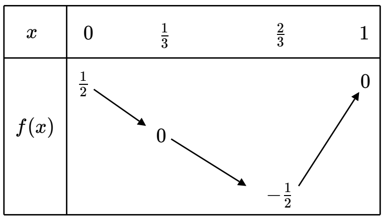
   On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$.
On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$. On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?
2. a. Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\,;\,x\,;\,x)$.

   b. Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$.
3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f\ :\ x \longmapsto \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$.



   Pour quelles positions du point M sur le segment $[DF]$:

   a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?

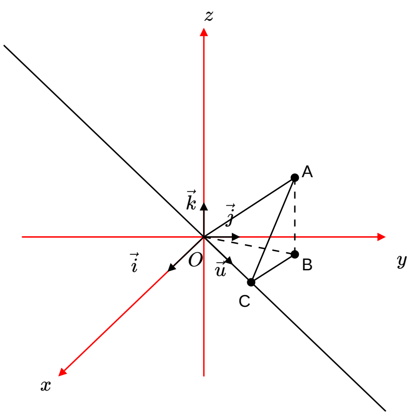
   b. l'angle θ est-il maximal ?

Exercice 30 ★★

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ on considère :

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.
   a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que : $AM^2 = 2t^2 - 8t + 14$.
   b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\ ;2\ ;0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
   On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\ ;3\ ;0)$.
   Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par: $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

Exercice 31 ★★

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(3\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $B(2\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et $C(-2\ ;\ -5\ ;\ 1)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $-x + y - 2z + 5 = 0$.
4. On considère le point $S(1\ ;\ -2\ ;\ 4)$.
   Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ), passant par S et orthogonale au plan (ABC).
5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
   Montrer que les coordonnées de H sont $(0\ ;\ -1\ ;\ 2)$.
6. Calculer la valeur exacte de la distance SH.
7. On considère le cercle $\mathcal{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathcal{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathcal{C}$.
   Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathcal{D}$.
8. En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathcal{D}$.

5 Combinatoire et dénombrement

Exercice 32 ★★

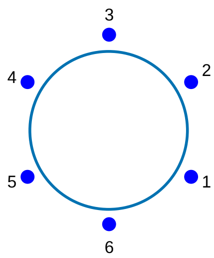
En France, une boulangerie est dans l'obligation de fermer un jour par semaine.
Dans une certaine ville on compte cinq boulangeries.

1. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire pour l'ensemble des boulangeries de cette ville.
2. Même question mais avec l'obligation de ne pas fermer le même jour.
3. Même question mais avec l'obligation qu'il y ait au moins une boulangerie ouverte chaque jour.

Exercice 33 ★★

Une table ronde comporte six places, numérotées de 1 à 6.
On veut répartir six personnes autour de cette table dont deux ne peuvent être placées côte à côte. Appelons-les Booris et Kaaba.

1. Combien y-a-t-il de dispositions possibles?
2. Même question si les places ne sont pas numérotées.



Exercice 34 ★★★

Soit n un entier naturel non nul. Soit u_n le nombre n-uplets de l'ensemble $\{0\ ;1\}$ ne contenant pas deux termes consécutifs égaux à 1.

1. Déterminer la valeur de u_1.
2. Donner la liste des couples de l'ensemble $\{0\ ;1\}$ et en déduire u_2.
3. Montrer que $u_3 = 5$.
4. On considère $n \geq 3$ quelconque. En raisonnant sur la valeur du dernier élément d'un n-uplet, montrer que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
5. Compléter l'algorithme ci-dessous pour que la fonction *u* retourne la liste de toutes les valeur de u_n, à partir de la formule de la question précédente.

```
def u(n):
    L = []
    L.append(2)
    L.append(3)
    for i in range(2,n):
        L.append( L[i-2]+L[...] )
    return ...
```

6. On cherche dans cette question à déterminer une formule explicite pour u_n, pour tout $n \geq 1$.
   a. Montrer que : $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On admettra pour la question suivante que : $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier $n\geq 1$, $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$.

6 QCM et vrai/faux

Exercice 35 ★

Question 1 :

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n entier naturel par $u_n=\dfrac{1+2^n}{3+5^n}$. Cette suite :

a. diverge vers $+\infty$

b. converge vers $\dfrac{2}{5}$.

c. converge vers 0

d. converge vers $\dfrac{1}{3}$.

Question 2 :

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=x^2\ln x$.

L'expression de la fonction dérivée de f est :

a. $f'(x)=2x\ln x$.

b. $f'(x)=x(2\ln x+1)$

c. $f'(x)=2$.

d. $f'(x)=x$.

Question 3 :

On considère une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

On note H la primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Elle vérifie la propriété :

a. H est positive sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

b. H est croissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$.

c. H est négative sur $]-\infty\ ;\ 1]$.

d. H est croissante sur $\mathbb{R}$.

Question 4 :

Soit deux réels a et b avec $a<b$.

On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et qui s'annule en un réel α.

Parmi les propositions suivantes, la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α à $0,001$ est :

a.
```python
def racine(a,b):
    while abs(b-a) >= 0.001:
        m = (a+b)/2
        if f(m) < 0 :
            b = m
        else:
            a = m
    return m
```

```python
def racine(a,b):
    m = (a+b)/2
    while abs(b-a) >= 0.001:
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else:
            b = m
    return m
```

```python
def racine(a,b):
    m = (a+b)/2
    while abs(b-a) <= 0.001:
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else:
            b = m
    return m
```

```python
def racine(a,b):
    while abs(b-a)> = 0.001:
        m = (a+b)/2
        if f(m) < 0 :
            a = m
        else:
            b = m
    return m
```

Question 5 :

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 7 sont bleues et les autres vertes.

On effectue trois tirages successifs avec remise. La probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes est :

a. $\left(\dfrac{7}{10}\right)^2\times\dfrac{3}{10}$.

b. $\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$.

c. $\dbinom{10}{2}\left(\dfrac{7}{10}\right)\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$.

d. $\dbinom{3}{2}\left(\dfrac{7}{10}\right)\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$.

Exercice 36 ★★★

Question 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\mathrm{e}^x$.

Une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est définie par :

a. $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$

b. $F(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$

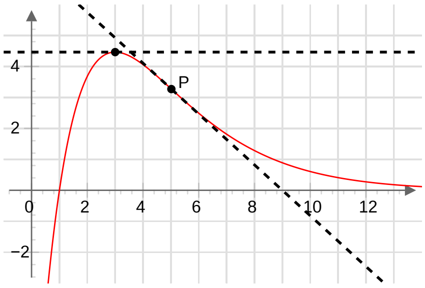
c. $F(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$

d. $F(x)=\dfrac{2}{x}\mathrm{e}^{x^2}$.

Question 2 :

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. On sait que :

- le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3 ;
- le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.



On a :

a. pour tout $x \in]0\ ;\ 5[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe;
b. pour tout $x \in]5\ ;\ +\infty[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe;
c. pour tout $x \in]0\ ;\ 5[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe;
d. pour tout $x \in]5\ ;\ +\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

Question 3 :
On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{a}{b + \mathrm{e}^{-t}}$ où a et b sont deux nombres réels.
On sait que $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 3$.
Les valeurs de a et b sont :

a. $a = 2$ et $b = 3$ b. $a = 4$ et $b = \dfrac{4}{3}$ c. $a = 4$ et $b = 1$ d. $a = 6$ et $b = 2$

Question 4 :
Alice dispose de deux urnes A et B contenant chacune quatre boules indiscernables au toucher.
L'urne A contient deux boules vertes et deux boules rouges.
L'urne B contient trois boules vertes et une boule rouge.
Alice choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Elle obtient une boule verte.
La probabilité qu'elle ait choisi l'urne B est :

a. $\dfrac{3}{8}$ b. $\dfrac{1}{2}$ c. $\dfrac{3}{5}$ d. $\dfrac{5}{8}$

Question 5 :
On pose $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{100}$.
Parmi les scripts Python ci-dessous, celui qui permet de calculer la somme S est :

a.
```python
def somme_a():
    S = 0
    for k in range(100):
        S = 1/(k+1)
    return S
```

b.
```python
def somme_b():
    S = 0
    for k in range(100):
        S = S+1/(k+1)
    return S
```

c.
```python
def somme_c():
    k = 0
    while S < 100:
        S = S+1/(k+1)
    return S
```

d.
```python
def somme_d():
    k = 0
    while k < 100:
        S = S+1/(k+1)
    return S
```

Exercice 37 ★★

1. Une primitive de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$, est la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, par :
   a. $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$ b. $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ c. $F(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ d. $F(x) = x^2\mathrm{e}^{x^2}$
2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$. La fonction g est définie sur:\index{ensemble de définition}
   a. $\mathbb{R}$. b. $]-2\ ;\ +\infty[$. c. $]-\infty\ ;\ -2[\cup]1\ ;\ +\infty[$. d. $]-2\ ;\ 1[$.
3. La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ est :
   a. concave sur $\mathbb{R}$
   b. convexe sur $\mathbb{R}$
   c. convexe sur $]-\infty\ ;\ -3]$ et concave sur $[-3\ ;\ +\infty[$
   d. concave sur $]-\infty\ ;\ -3]$ et convexe sur $[-3\ ;\ +\infty[$
4. Une suite (u_n) est minorée par 3 et converge vers un réel ℓ. On peut affirmer que :
   a. $\ell = 3$.
   b. $\ell \geqslant 3$
   c. La suite (u_n) est décroissante.
   d. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.
5. La suite (w_n) est définie par $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif, $w_{n+1} = \dfrac{1}{n}w_n$.
   a. La suite (w_n) est géométrique.
   b. La suite (w_n) n'admet pas de limite.

c. $w_5 = \dfrac{1}{15}$.
d. La suite (w_n) converge vers 0.

Exercice 38 ★★★

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par
$$f(x) = 0,05 - \frac{\ln x}{x-1}.$$
La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à :
a. $+\infty$ b. $0,05$ c. $-\infty$ d. 0
2. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-2; 4]$ telle que : $h(-1) = 0$, $h(1) = 4$, $h(3) = -1$.
On peut affirmer que :
a. la fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
b. la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
c. il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[1\ ;\ 3]$ tel que $h(a) = 1$.
d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.
3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) converge vers 0 . On peut affirmer que :
a. la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge.
b. la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge.
c. la suite (u_n) est croissante.
d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n)^n = -\infty$.
4. Pour participer à un jeu, un joueur doit payer 4 \euro. Il lance ensuite un dé équilibré à six faces :
   - s'il obtient 1, il remporte 12 €
   - s'il obtient un nombre pair, il remporte 3 €
   - sinon, il ne remporte rien.

   En moyenne, le joueur :
a. gagne $3,50$ € b. perd 3 €. c. perd $1,50$ € d. perd $0,50$ €.
5. On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(3\ ;\ p)$. On sait que $P(X=0) = \dfrac{1}{125}$. On peut affirmer que :
a. $p = \dfrac{1}{5}$. b. $P(X=1) = \dfrac{124}{125}$. c. $p = \dfrac{4}{5}$. d. $P(X=1) = \dfrac{4}{5}$.

Exercice 39 ★★

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par
$$f(t) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2}$$
où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.
À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous.
Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».
- **Affirmation 2** : « À très long terme, la population dépassera $21\,000$ bactéries ».
- **Affirmation 3** : « La population de bactéries aura un effectif de $10\,000$ à deux reprises au cours du temps ».

Exercice 40 ★★

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation :** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$ est convexe.
2. **Affirmation :** L'équation $(2\mathrm{e}^x - 6)(\mathrm{e}^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. **Affirmation :**
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x - x} = 0.$$
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x+5)\mathrm{e}^{3x}$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{3x} + 4$.
Affirmation : F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 quand $x = 0$.
5. On considère la fonction *mystere* définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre. On rappelle que *len(L)* représente la longueur de la liste L.

```
def mystere(L):
    S = 0
    for i in range(len(L)):
        S = S+L[i]
    return S/len(L)
```

Affirmation : L'exécution de *mystere([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5])* renvoie 50.