Terminale ~ Spécialité mathématique
Limites de fonctions

1 Limites d'une fonction en l'infini

Une fonction peut avoir trois types de comportement lorsque la variable tend vers l'infini.

1.1 Limite finie

Nous allons donner ici une définition précise à la notion intuitive qui est, qu'une fonction possède une limite finie ℓ en $+\infty$, lorsque les images peuvent être aussi proches de ℓ que souhaité si la variable est assez grande.

Définition 1 -- *Fonction possédant une limite finie en l'infini*

Soient f une fonction et ℓ un réel. On dit que la fonction f si tout intervalle contenant contient toutes les valeurs pour x

On note alors :

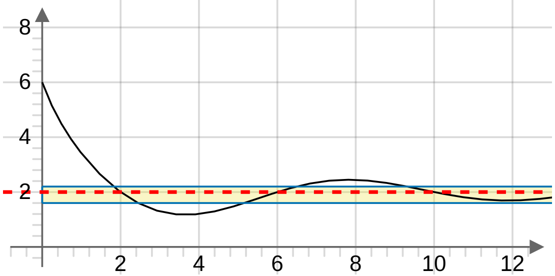
Remarque 1

Cette définition est à rapprocher de celle de la limite d'une suite donnée dans le cours sur les suites numériques.

Remarque 2

Nous avons une définition similaire lorsque la variable tend vers $-\infty$.

Interprétation graphique



Définition 2 -- *Asymptote horizontale à une courbe*

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f, telle que

On dit alors que la droite d'équation est à la courbe $\mathcal{C}_f$ en

Remarque 3

Dans le graphique précédent la courbe de la fonction et son asymptote semblent de plus en plus lorsque les abscisses sont de plus en plus

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, on parle également d'asymptote horizontale en $-\infty$.

Exemple 1

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} =$ 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} =$ 3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} =$

1.2 Limite infinie

Définition 3 -- *Fonction possédant une limite infinie en l'infini*

Soient f une fonction. On dit que la fonction f tend vers quand x tend vers si tout intervalle du type contient toutes les valeurs de pour x

On note alors :

Remarque 4

On a une définition similaire lorsque la variable tend vers $-\infty$, ou lorsque la limite est $-\infty$. On note alors :

ou encore

Exemple 2

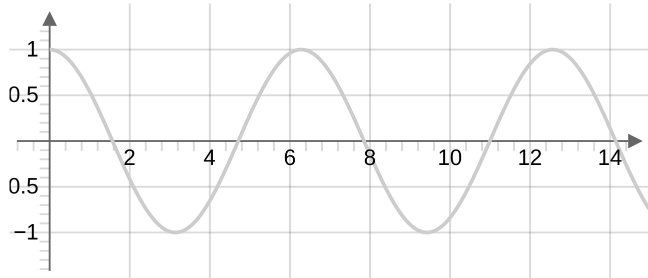
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x =$
2. Pour $n \geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n =$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x =$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 =$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n+1} =$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 =$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n} =$

1.3 Aucune limite

Certaines fonctions ne possèdent aucune limite quand la variable tend vers l'infini.

Exemple 3

Une fonction qui oscille régulièrement n'admet pas de limite en l'infini.



2 Limites en un réel

2.1 Limite finie

Définition 4 -- *Fonction possédant une limite finie en un réel*

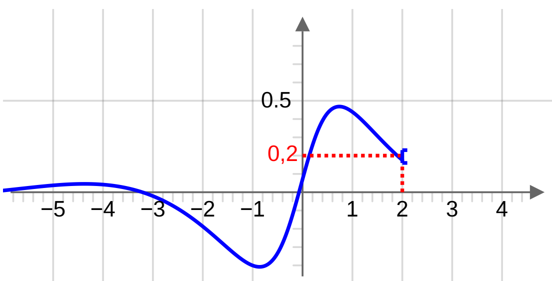
Soient f une fonction, a et ℓ deux réels. On dit que la est égale ℓ si tout intervalle contenant contient toutes les valeurs dès que x est suffisamment

On note alors :

Remarque 5

Certaines fonctions possèdent une limite en un réel, même si ce réel ne fait pas partie de l'ensemble de définition.

Exemple 4



On a ici une fonction f définie sur $]-\infty; 2[$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0,2$.

On peut remarquer que cette fonction n'est pas définie en 2, mais pourtant, pour x suffisamment proche de 2 les nombres $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut de $0,2$.

2.2 Limite infinie

Définition 5 -- *Fonction possédant une limite infinie en un réel*

Soient f une fonction et a un réel. On dit que f si tout intervalle ouvert de la forme contient toutes les valeurs dès que x est suffisamment

On note alors :

Remarque 6

On a une définition similaire pour une fonction divergeant vers

Exemple 5

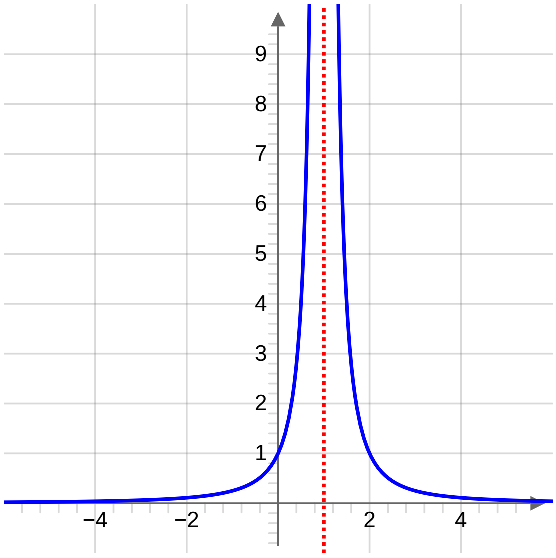
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

On a :

En effet, lorsque x est proche de 1, $(x-1)^2$ est proche de tout en étant

Et, plus un nombre est proche de 0, plus son inverse

Par exemple : $0,000\,1$ est proche de 0, alors que son inverse



Nous remarquons sur ce graphique que la courbe se rapproche de la droite verticale d'équation $x = 1$. On parle ici

Exemple 6

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

On a : $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} =$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} =$

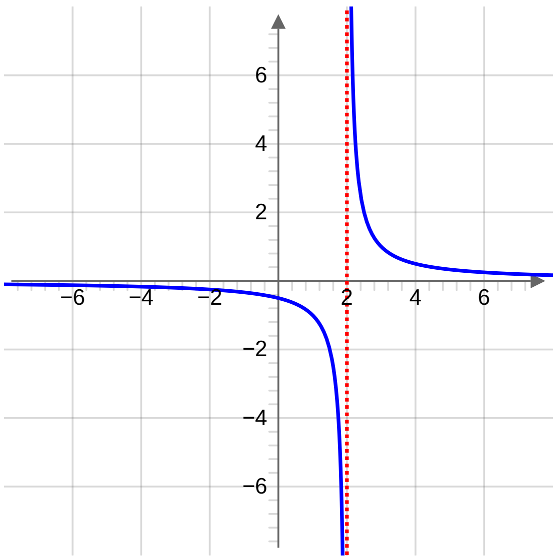
L'écriture signifie que x se rapproche de 2,

On peut également noter cela : et dire que x se rapproche de 2

Et justement, dans ce cas, si $x \xrightarrow{>} 2$ alors $x - 2 \to 0$, en étant Donc son inverse se rapproche bien de

Et si : $x \xrightarrow{<} 2$ alors $x - 2 \to 0$, en étant Son inverse se rapproche alors de

Sur ce graphique nous pouvons à nouveau observer une



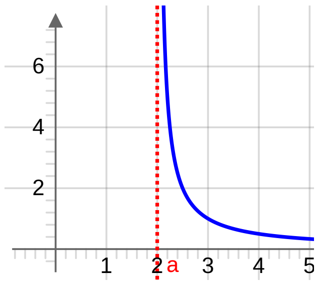
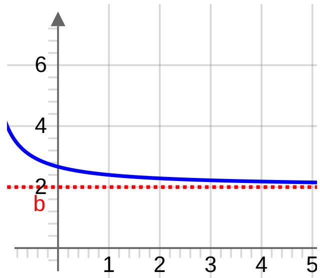
Exemple 7

Voici maintenant quelques exemples classiques à retenir.

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} =$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} =$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} =$

2.3 Récapitulatif sur la notion d'asymptote

On considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Soient de plus a et b des nombres réels.

Limite	Interprétation graphique
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	La droite d'équation 
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$	La droite d'équation 

3 Méthode pour déterminer une limite

3.1 Limite d'une somme

On considère dans le tableau suivant deux fonctions f et g dont on connaît les limites (soit en un réel, soit en l'infini).
On s'intéresse alors à la limite de la fonction $f + g$.
La deuxième colonne de ce tableau signifie que lorsqu'une fonction f converge vers un réel ℓ et qu'une fonction g converge vers un réel ℓ', alors la fonction $f + g$ converge vers le réel $\ell + \ell'$.

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$						

Explication sur la notion de forme indéterminée
Nous allons observer plusieurs exemples où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et pourtant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + g(x)$ donnera des résultats différents.

Exemple 8

Pour $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = -x^2$, on a bien :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$
Et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + g(x) =$

Exemple 9

Pour $f(x) = x^2$ et $g(x) = -4x^2$, on a bien :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$
Et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + g(x) =$

Nous pourrions trouver d'autres exemples avec encore d'autres résultats pour la limite de $f + g$. Ainsi on ne peut pas "prévoir" à l'avance le résultat de la limite. D'où l'expression "forme indéterminée".

3.2 Limite d'un produit

Nous procédons ici de même que pour la somme en présentant les résultats sous forme de deux tableaux, les possibilités étant plus nombreuses.

La deuxième colonne de ce tableau signifie que lorsqu'une fonction f converge vers un réel ℓ et qu'une fonction g converge vers un réel ℓ', alors la fonction $f \times g$ converge vers le réel $\ell \times \ell'$.

$\lim f$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim f \times g$					

$\lim f$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$

Explication sur la notion de forme indéterminée
Comme pour la limite d'une somme, nous allons ici donner deux exemples donnant des résultats différents.

Exemple 10

Pour $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x$, on a bien :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$
Et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) =$

Exemple 11

Pour $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^3$, on a bien :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

Et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) =$

Remarque 7

Lorsqu'une forme indéterminée se présente, il faut effectuer des calculs, travailler sur les expressions algébriques pour lever l'indétermination et trouver la limite. Il ne faudra donc pas se contenter d'écrire qu'il y a une forme indéterminée et ne plus rien faire.

3.3 Limite d'un quotient

Nous allons donner ici aussi deux tableaux, le premier sera pour un quotient dont le dénominateur à une limite non nulle.

$\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	∞
$\lim \dfrac{f}{g}$							

Limite d'un quotient dont le dénominateur à une limite nulle.

$\lim f$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0
$\lim g$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim \dfrac{f}{g}$					

Exercice 1

Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 2x^3}{1 + \dfrac{1}{x}}$.

Correction

Nous avons que : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^3 =$ donc : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} 1 - 2x^3 =$

De plus : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} =$ donc : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{1}{x} =$

Ainsi, par

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 2x^3}{1 + \frac{1}{x}} =$$

Exercice 2

Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^3 - 10x$.

Correction

On a : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^3 =$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 10x =$

Nous sommes donc en présence d'une Pour comprendre la méthode qui va suivre, il faut avoir l'intuition que va exploser beaucoup plus vite que Ainsi c'est sans doute qui va l'emporter. Pour cela, nous allons le dans l'expression algébrique.

On a alors que :

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^3 =$ et :

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{10}{x^2} =$

On peut alors conclure, par

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 - 10x =$$

Exercice 3

Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - x + 1}{3x + 1}$.

Correction

Le numérateur possède une qui ressemble à celle de l'exercice précédent. Nous allons y mettre en facteur.

La limite devrait donc être au numérateur, mais également au Ceci est à nouveau une forme indéterminée. Nous allons pour cela mettre en facteur le terme au numérateur et au dénominateur.

On a alors :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \dfrac{1}{x} =$

Par quotient de limites, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{3x + 1} =$$

3.4 Limite de fonctions polynômes et rationnelles en l'infini

Les méthodes utilisées dans la résolution des exercices précédents peuvent être généralisées à tous polynômes et fonctions rationnelles (c'est-à-dire quotient de plynômes) lorsqu'on cherche une limite en $+\infty$ ou $-\infty$.

Propriété 1

- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite
- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite

Remarque 8

ATTENTION ! Ces propriétés sont valables uniquement lorsque la variable tend vers

Exemple 12

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - x^2 + 8 =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 1}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^6 - x + 4} =$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + 11}{x - 1} =$$

3.5 Limites de fonctions composées

Définition 6 -- *Fonction composée*

Soit v est une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I,

On appelle fonction la fonction f définie pour tout x appartenant à I par :

Exemple 13

Si pour tout réel $x > 0$: $f(x) = \sqrt{x+1}$, alors f est la composée des fonctions u et v définies par :

Exercice 4

Soient u et v deux fonctions définies pour tout réel x par : $u(x) = x^2$ et $v(x) = x + 1$.
Déterminer les expressions algébriques des fonctions : $u \circ v$ et $v \circ u$.

Correction

Pour tout réel x :

Remarque 9

La composition des fonctions n'est pas une opération C'est-à-dire que de manière générale :

Propriété 2 -- *Limite d'une fonction composée*

Soient f, g et h trois fonctions telles que $f = g \circ h$.

Si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} g(X) = c$, alors on a :

Exercice 5

Déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 3}}$.

Correction

La fonction f est de la forme avec

Nous allons donc, tout d'abord, déterminer la limite de

Puisque la fonction u est une fonction rationnelle et que l'on cherche une limite en l'infini, on utilise la propriété qui nous permet de ne conserver que les termes de

Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} =$ ainsi par

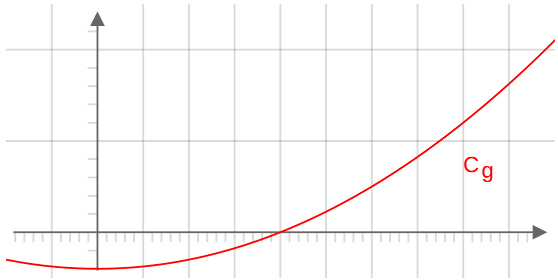
$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+3}} =$

3.6 Théorème de comparaison et d'encadrement des limites

Propriété 3 -- *Comparaison de limites*

Si pour x assez grand, et si

alors,



Remarque 10

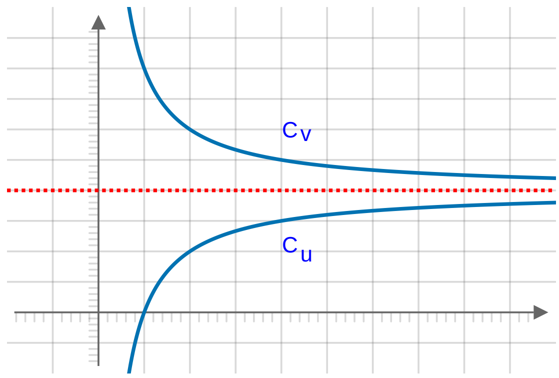
La courbe de la fonction f est toujours de celle de la fonction g, qui elle monte de plus en plus. Nécessairement la fonction f aura des valeurs globalement de plus en plus

Propriété 4 -- *Encadrement de limites (ou théorème des gendarmes)*

Si pour x assez grand, et si avec $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = \ell,$$

alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$



Remarque 11

La courbe de la fonction f est "emprisonnée" par celles des fonctions g et h, qui se rapprochent de plus en plus l'une de l'autre. Les valeurs de la fonction f sont donc de plus en plus proches de la commune des fonctions g et h.

Remarque 12

On peut écrire des propriétés similaires lorsque la variable tend vers ou encore un pour le théorème des gendarmes.

4 Limite en l'infini de la fonction exponentielle

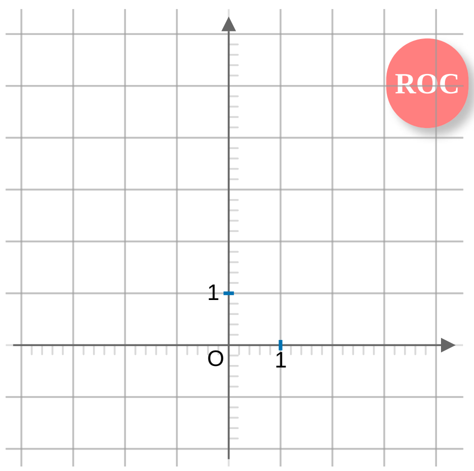
Propriété 5

Preuve

Pour tout entier n, est une suite de raison ainsi

Il nous reste à démontrer la limite lorsque la variable est
Soit $A > 0$, puisque il existe donc n_0 , tel

que pour tout $n \geq n_0$,



Courbe représentative de la fonction exponentielle

Pour tout réel il existe un entier n compris entre C'est-à-dire et puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :
Comme $n \geq n_0$, on a et on en déduit
Ce qui démontre bien que

Pour la limite en $-\infty$ on procède par
On pose et on a alors :

Ainsi :

Propriété 6 -- *Croissances comparées* --

ROC

1.
2.

Preuve du point 1

Montrons tout d'abord que pour tout réel $x \geq 0$, :

On définit pour tout réel x la fonction ϕ par :

Le but étant de montrer que ϕ est sur $[0;+\infty[$.

Pour tout réel x, on a
On a de plus que et puisque la fonction exponentielle est et que on a que pour tout
Ainsi, la fonction ϕ' est
Or, donc pour tout $x \geq 0$,

Ainsi, la fonction ϕ est

Or, donc, pour tout $x \geq 0$,

C'est-à-dire, que pour tout réel $x \geq 0$,

Pour tout $x > 0$, on obtient alors :

Or,

Preuve du point 2

Il suffit d'appliquer à nouveau le changement de variable

En effet, $x \to -\infty$, si et seulement si

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x =$ d'après le point 1.

Propriété 7 -- *Croissances comparées* -- ROC

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1.

2.

Preuve du point 1

Montrons tout d'abord, par récurrence, que : pour tout entier n, pour tout réel $x > 0$,

Initialisation.

La propriété est bien vérifiée pour
Hérédité.

Supposons que pour entier n, et montrons alors que :

Pour cela, posons, pour tout x, et montrons que la fonction ϕ ainsi définie est

On a :

La fonction ϕ est donc sur , et puisque

pour tout $x \geq 0$, Ainsi, pour tout $x \geq 0$,

Conclusion.

D'après le proncipe de récurrence on a, pour tout entier n, pour tout réel $x \geq 0$,

Ainsi, pour tout entier n, pour tout $x > 0$, et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{(n+1)!} =$ par de limites, nous avons bien que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} =$

Preuve du point 2
On procède à nouveau à l'aide du changement de variable

5 Formulaire

Dans le formulaire ci-dessous le nombre n est un entier naturel non nul.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2n} =$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2n+1} =$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2n+1} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} =$	$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^n} =$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} =$	$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^{2n}} =$
	$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^{2n+1}} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} =$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} =$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^n} =$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^{x}} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} =$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^{x} =$