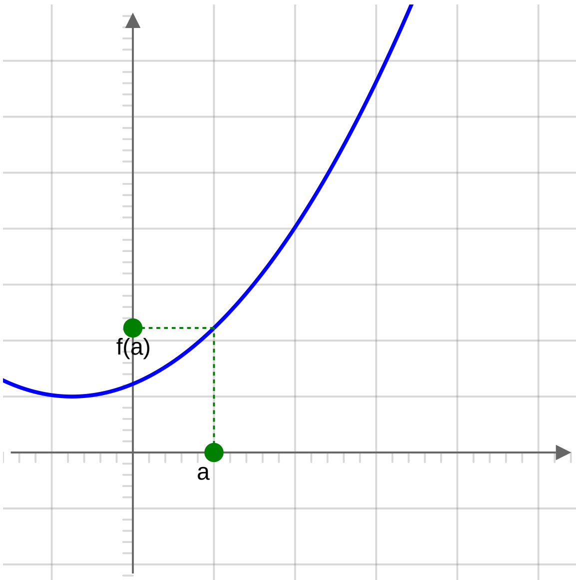
Terminale ~ Spécialité mathématique
Dérivation

1 Nombre dérivé - Fonction dérivée : définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, contenant les nombres a et $a+h$ avec $h \neq 0$
Le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$ est :

Ou encore en posant $x = a + h$, le taux de variation vaut :

Graphiquement, ce taux correspond au de la sécante.



Remarque 1

Lorsque le nombre h se rapproche de 0, la corde se rapproche d'une

Définition 1 -- *Nombre dérivé*

La fonction f est dite si existe et est Dans ce cas cette limite s'appelle le de f en a. On le note c'est-à-dire :

ou encore,

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Démontrer que g est dérivable en tout $a > 0$.
2. Démontrer que g n'est pas dérivable en 0.

Correction

1.

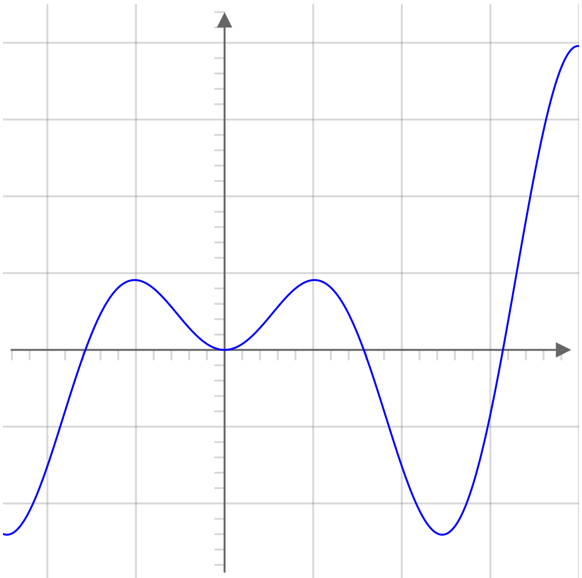
2.

Définition 2 -- *Fonction dérivable*

On dit que f est sur l'intervalle I si elle est dérivable en
On peut alors définir une fonction qui à tout x de I associe le nombre
On l'appelle de la fonction f sur I et on la note

Définition 3 -- *Tangente à une courbe*

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère. On considère le point $A(a, f(a))$. Si le nombre $f'(a)$ on a alors que, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite passant par et de coefficient directeur



Propriété 1 -- *Équation de la tangente*

Soit f une fonction dérivable en a. L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, est donnée par :

Preuve.

On sait tout d'abord que l'équation de la tangente est de la forme : où b reste à déterminer. Pour cela utilisons le fait que le point appartient à la droite. Ainsi, L'équation de la tangente est donc de la forme :

Exercice 2

Trouver l'équation de la tangente en 4 à la courbe de la fonction g, définie par $g(x) = \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

Correction

Nous savons que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $g'(x) =$

L'équation de la tangente à la courbe de g en 4 est donc :

2 Calcul de la fonction dérivée

2.1 Dérivée des fonctions usuelles

Lors de l'exercice 1, nous avons en fait déterminé l'expression de la fonction dérivée de la fonction racine carrée.
Pour toutes les fonctions usuelles des calculs de limites similaires nous fournissent leur fonction dérivée. Nous en donnons ici directement les résultats.

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de dérivabilité
c (constante)		
x		
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$		
$\dfrac{1}{x}$		
$\dfrac{1}{x^n}$		
$\sqrt{x}$		
e^x		

Exercice 3

Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Correction

Nous appliquons la formule du tableau donnant la dérivée de $\dfrac{1}{x^n}$ avec

Ainsi, pour tout $x \in]0;+\infty[$,

2.2 Dérivation et opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors $u+v$, $k \times u$, où k est une constante multiplicative, et $u \times v$ sont dérivables sur I.

Si de plus v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I.

Propriété 2

Remarque 2

Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Les fonctions rationnelles (quotient de deux polynômes) sont dérivables sur chaque de leur ensemble de définition.

2.3 Fonction composée et dérivation

Définition 4 -- *Fonction composée*

Soit v est une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I, $u(x)$ appartient à J.

On appelle fonction composée $v \circ u$ la fonction f définie pour tout x appartenant à I par :

Propriété 3

Soit v est une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I, $u(x)$ appartient à J. On a alors :

C'est-à-dire, pour tout réel $x \in I$ tel que $u(x) \in J$:

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

Correction

f est de la forme avec :

$v(x)$ et $u(x)$

$v'(x)$ et $u'(x)$

Ainsi, pour tous réel x :

Propriété 4

Soient u et f deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Si u ne s'annule pas sur I,

Si u est strictement positive sur I,

Pour tous réels a et b,

Exercice 5

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

1. $f(t)=\sqrt{5-3t}$, sur $\left]-\infty;\dfrac{5}{3}\right[$,
2. $g(x)=(3x^2+5)^4$, sur $\mathbb{R}$.

Correction

1. La fonction f est de la forme avec $u(t)=$ et donc
   Ainsi, pour tout $t\in\left]-\infty;\dfrac{5}{3}\right[$:
   $g'(t)=$
2. La fonction g est de la forme avec $u(x)=$ et donc : Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=$

3 Applications de la dérivation

3.1 Dérivée et sens de variation

Propriété 5

Soit f une fonction définie sur intervalle I.

○ Si pour tout $x \in I$, sauf peut-être en un nombre de valeurs où alors

○ Si pour tout $x \in I$, sauf peut-être en un nombre de valeurs où alors

○ Si pour tout $x \in I$, alors f est

Exercice 6

Étudier le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = x^3$.

Correction

Déterminons tout d'abord l'expression algébrique de la fonction de f.
Pour tout réel x,
Ainsi, pour tout réel x, sauf pour donc d'après la propriété précédente, f est

Propriété 6 -- *Extremun local*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant x_0.
Si f' en changeant alors $f(x_0)$ est pour f sur I.

Exercice 7

Étudier l'existence ou non d'un extremum local en 0 pour les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4$ et $g(x) = x^3$.

Correction

Pour la fonction f.
On a $f'(x) =$ et donc f' s'annule en En appliquant la propriété précédente nous avons donc que la fonction f présente On vérifie ici, que la courbe correspondante possède un d'abscisse $x = 0$.

Pour la fonction g.
On a $g'(x) =$ et g' s'annule en mais en restant Ainsi, la fonction g ne possède pas en 0, chose qui se vérifie en traçant la courbe de la fonction cube.